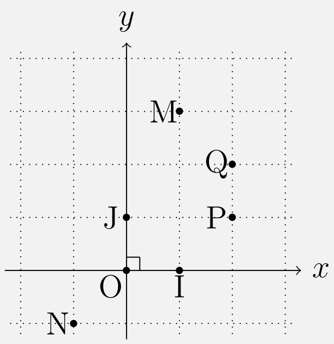
Fonctions : images et antécédents – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		27	1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14	3, 14, 23	8, 18, 19, 20, 21, 22	7
Exercices ★★	25	15, 28	5, 15, 16, 17, 24, 25	5, 26	16, 17, 26, 28	
Exercices ★★★		29, 30, 31	29, 31		29	

Exercice 1 ★ [Représenter]

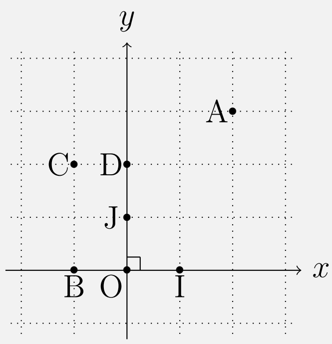
On considère le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous.



1. Le repère $(O\,;I\,,J)$ est-il orthonormé ? Est-il orthogonal ?
2. Lire les coordonnées des points M, N P et Q dans le repère $(O\,;I\,,J)$.
3. Placer les points $R(-1\,;2)$ et $S(2\,;-1)$ sur le repère.

Exercice 2 ★ [Représenter]

On considère le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous.



Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

1. L'abscisse du point A est 2.
2. L'abscisse du point B est 0.
3. L'ordonnée du point B est 0.
4. L'abscisse du point D est 0.
5. L'abscisse du point C est 3.
6. L'ordonnée du point C est -1.
7. L'abscisse du point I est 1.

Exercice 3 ⋆ [Raisonner]

On considère la proposition suivante : « Si un repère est orthogonal, alors il est orthonormé ».

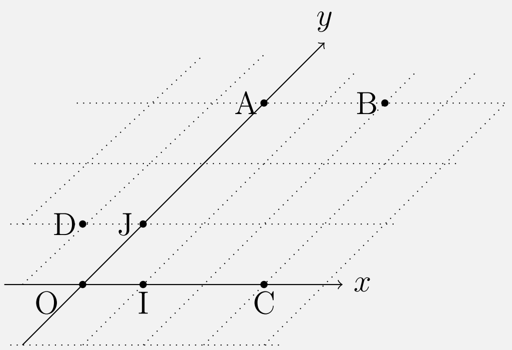
1. La proposition est-elle vraie ou fausse ?
2. Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 4 ⋆ [Représenter]

1. Soit $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$ un repère orthonormé. Quelles sont les coordonnées des points O, I et J dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$?
2. La réponse a la question 1 est-elle valable si $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$ est un repère quelconque ?

Exercice 5 ⋆⋆ [Représenter, Raisonner]

On considère le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ ci-dessous.



1. Le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$ est-il orthonormé ? Est-il orthogonal ?
2. Lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$.
3. Déterminer les coordonnées de tous les points dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{A})$.
4. Quels sont les points du plan dont les coordonnées dans les repères $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ et $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{A})$ sont les mêmes ?

Exercice 6 ⋆ [Représenter]

On considère une fonction f telle que $f(1) = -2$. Compléter les phrases suivantes :

1. L'image du nombre réel ... par la fonction f est ...
2. Un antcédent du nombre réel ... par la fonction f est ...
3. Le point $\mathrm{A}(\ldots\,;\ldots)$ est un point de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 7 ⋆ [Représenter, Communiquer]

On considère une fonction f telle que $f(-5) = 7$. Traduire cette égalité par une phrase en utilisant le terme suivant :

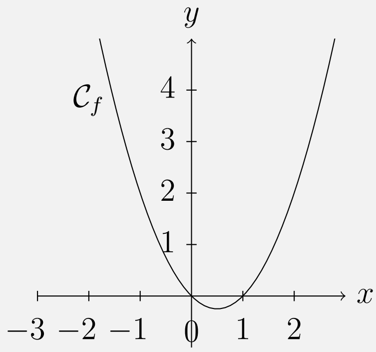
1. Image
2. Antécédent
3. Courbe représentative

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$. Déterminer l'image de 3 par f.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$. Déterminer l'image de 0 par f.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x - 5$. Déterminer l'image de -1 par f.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-5)^2$. Déterminer l'image de 9 par f.
5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2$. Déterminer l'image de -2 par la f.
6. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -\frac{-x+1}{x}.$$
Déterminer l'image de 2 par f.

Exercice 9 ⋆ [Représenter]

On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.



1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

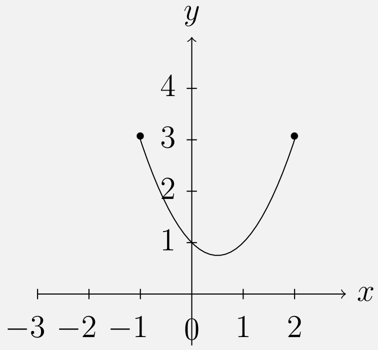
x	-2	-1	0	$\frac{5}{4}$	2
$f(x)$					

2. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 1 par la fonction f.
3. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 0 par la fonction f.
4. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de -2 par la fonction f.

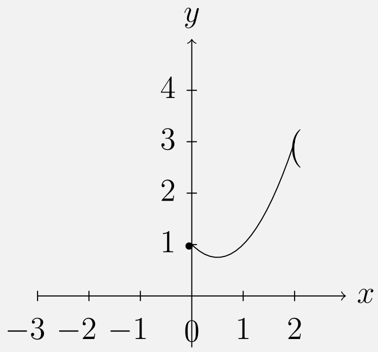
Exercice 10 ⋆ [Représenter]

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dont la courbe est représentée ci-dessous.

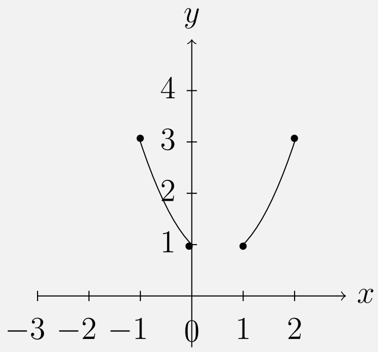
1.



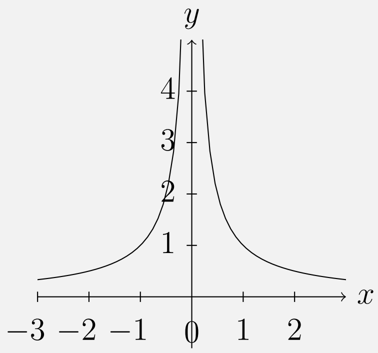
2.



3.

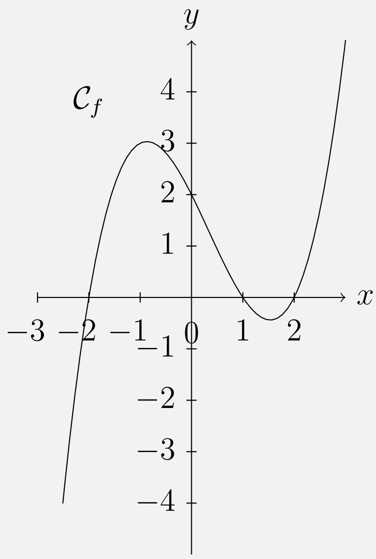


4.



Exercice 11 ⋆ [Représenter]

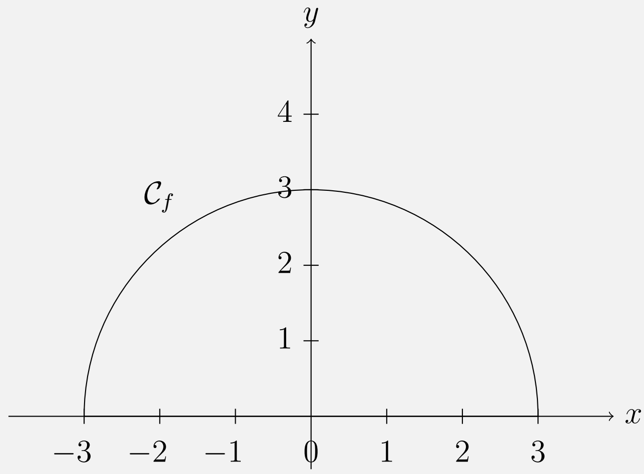
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de -2 par la fonction f.
2. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 1 par la fonction f
3. Déterminer graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 0 par la fonction f

Exercice 12 ⋆ [Représenter]

On considère la fonction f dont la courbe est représentée ci-dessous.



Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'ensemble de définition de f est $[0\,;3]$.
2. 0 a pour image 3 et -3 par f.
3. 1 a exactement deux antécédents par f
4. 0 a exactement un antécédent par f.
5. -1 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 13 ⋆ [Représenter]

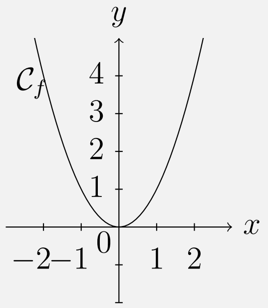
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Compléter le tableau ci-dessous.

Égalité	Image	Antécédent	Courbe
$f(4) = 5$			
	1 a pour image 2		
		0 est un antécédent de 3	
			M$(-1\,;-5)$ est un point de $\mathcal{C}_f$.

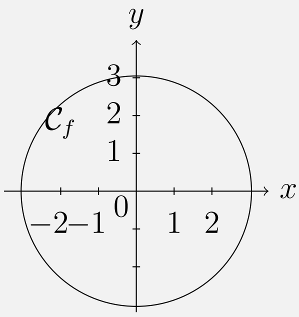
Exercice 14 ⋆ [Représenter, Raisonner]

Parmi les courbes suivantes, lesquelles correspondent à des courbes représentatives de fonctions.

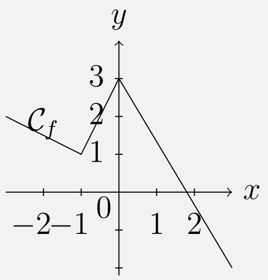
1.



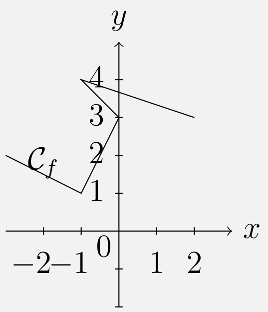
2.



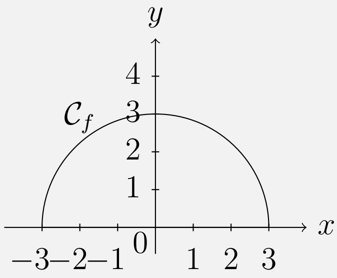
3.



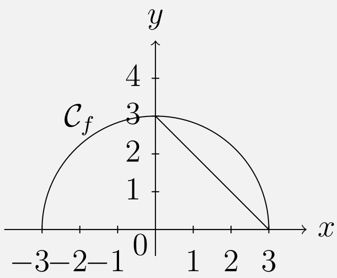
4.



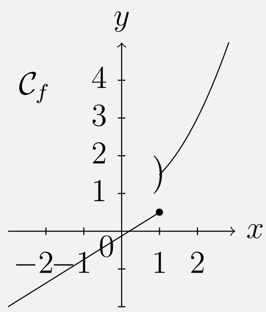
5.



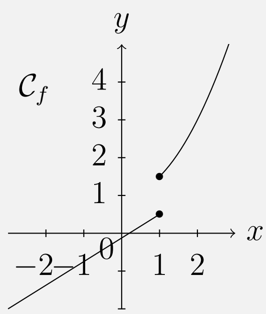
6.



7.

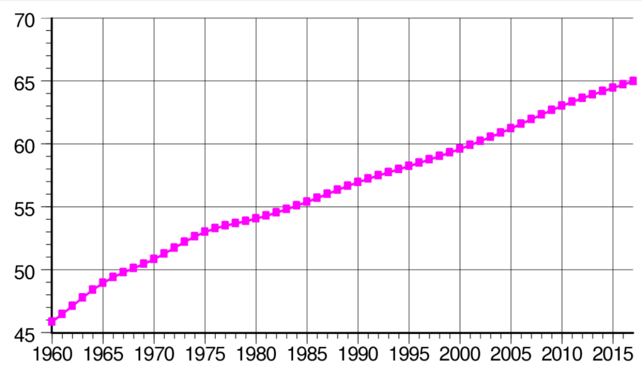


8.



Exercice 15 ⋆⋆ [Représenter, Modéliser]

On a représenté ci-dessous l'évolution du nombre d'habitants en France (en millions) en fonction des années entre 1960 et 2015.



(d'après Wikipédia, Histoire démographique de la France)

1. Justifier que cette courbe correspond bien à la représentation d'une fonction. Quel est son ensemble de définition ?
2. On note a une année comprise entre 1960 et 2015 et $N(a)$ le nombre de millions d'habitants en France correspondant à cette année.
   (a) Déterminer graphiquement $N(1990)$. Interpréter le résultat par une phrase.
   (b) Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 60 par N. Interpréter le résultat par une phrase.

Exercice 16 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}.$$

1. En utilisant une calulatrice, compléter ce tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

2. Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de f ?

   A $\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$; B $\left(-1\,;-\frac{1}{2}\right)$;

   C $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$; D $(0\,;0)$.

Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice et recopier la courbe sur votre copie.
2. Par lecture graphique, déterminer l'image de 2 par la fonction f.
3. Retrouver le résultat précédent par le calcul.
4. Par lecture graphique, déterminer les éventuel(s) antécédents de 0,5 par la fonction f.
5. Par lecture graphique, déterminer les éventuel(s) antécédents de 2 par la fonction f.

Exercice 18 ⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - x - 6.$$

1. Calculer l'image par f de 0.
2. Déterminer $f(-1)$.

Exercice 19 ⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{x-1}.$$

1. Calculer l'image par f de $\frac{4}{3}$.
2. Calculer $f(0)$.

Exercice 20 ⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x + 3.$$

1. Calculer l'image par f de 7.
2. Calculer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 5 par la fonction f.

Exercice 21 ⋆ [Calculer]

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -3x + 1.$$

1. Calculer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 5 par la fonction g.
2. Calculer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 0 par la fonction g.

Exercice 22 ⋆⋆ [Calculer]

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}.$$

1. Calculer l'image de 5 par la fonction h.
2. Calculer le(s) éventuel(s) antécédent(s) de $\dfrac{5}{6}$ par la fonction h.

Exercice 23 ⋆ [Raisonner]

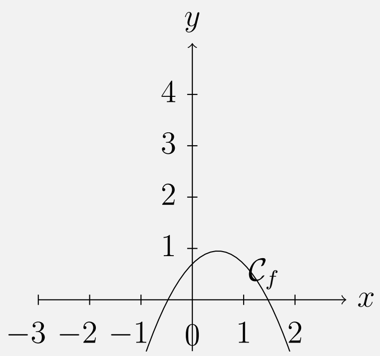
On considère la proposition suivante :
« Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$ ».

1. La proposition est-elle vraie ou fausse ?
2. Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ou fausse ?

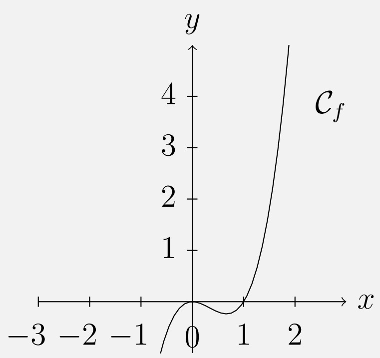
Exercice 24 ⋆⋆ [Représenter]

Dans chaque cas, suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, le nombre d'antécédents de k par la fonction f.

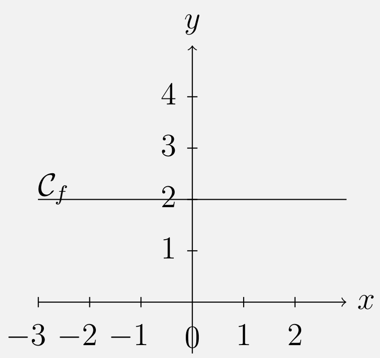
1.



2.



3.



Exercice 25 ⋆⋆ [Représenter, Chercher]

Dans un repère orthonormé, tracer un exemple de courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5\,;5]$ et vérifiant les conditions données par le tableau suivant :

k	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$	-7
nombre d'antécédents de k	1	2	1	4

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

L'objectif de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. (a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$											

   (b) Compléter, à l'aide du tableau précédent, les inégalités suivantes :

$$\ldots \leqslant \sqrt{2} \leqslant \ldots$$

   Remarque : une telle inégalité est appelée un encadrement de $\sqrt{2}$ à 0,1 près.

3. En utilisant la même méthode qu'à la question 2, déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ à 0,01 près.

Exercice 27 ⋆ [Modéliser]

Aux États-Unis, l'unité de température est le degré Fahrenheit (°F). Si f désigne la température en degré Fahrenheit et c la température en degré Celsius, la relation entre f et c est :

$$f = \frac{9}{5}c + 32.$$

Selon Ray Bradburry, auteur du roman *Fahrenheit 451*, le papier s'enflamme spontanément à 451°F. Déterminer à quelle température cela correspond-t-il en degré Celsius.

Exercice 28 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

En physique, le poids (en Newton) s'exprime en fonction de la masse m (en kilogrammes) à l'aide de la relation $P = mg$ (où g $\simeq$ 9,8$m.s^{-2}$). On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 9{,}8x$.

1. Déterminer l'image de 10 par f. Interpréter ensuite le résultat d'un point de vue physique.
2. Déterminer le(s) éventuel(s) antécédents de 500 par la fonction f. Interpréter ensuite le résultat d'un point de vue physique.

Exercice 29 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

1. Un coureur à pied parcourt une distance $d = 10$km. La vitesse moyenne de course v (en km.h^{-1}) est liée au temps de course t (en heures) par la formule suivante :
$$v = \frac{d}{t}.$$
   (a) Exprimer t en fonction de v.
   (b) Tracer la courbe de t en fonction de v à l'aide de la calculatrice pour une vitesse v comprise entre 8km.h^{-1} et 20km.h^{-1}
   (c) Déterminer graphiquement quelle est la vitesse correspondant à un temps de 40min.
   (d) Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 30 ⋆⋆⋆ [Modéliser]

En 1597, Galilée commence à travailler sur la chute des corps. Pour cela, il jette un objet du haut de la tour de Pise et note le temps de chute. Il découvre alors que, quel que soit le poids de l'objet, la hauteur h de l'objet en fonction du temps t est donnée par la formule suivante :

$$\text{Pour tout } t \geqslant 0, \quad h(t) = -5t^2 + 50.$$

1. Quelle est la hauteur de l'objet à $t = 0$?
2. Si on jette un objet du haut de la tour de Pise, déterminer une valeur approchée à 0,1 près du temps écoulé avant que l'objet touche le sol.

Remarque : Le fait que Galilée ait réalisé des expériences du haut de la tour de Pise est certainement une légende. Il n'en reste pas moins qu'il fut le premier à comprendre et à décrire mathématiquement la chute des corps.

Exercice 31 ⋆⋆ [Modéliser, Représenter]

On injecte un médicament à un patient au temps $t = 0$. Des chercheurs ont montré que la concentration de ce médicament dans le sang du patient peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0\,;10]$ par $C(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$ où t est le temps écoulé en heures et $C(t)$ la concentration en mg.L^{-1}.
Déterminer graphiquement si, au bout d'un certain temps, la concentration peut être strictement supérieure à 2 mg.L^{-1}.