Lycée Lucie Aubrac - 2^{nde}

Chapitre 6
Fonctions : images et antécédents

Table des matières

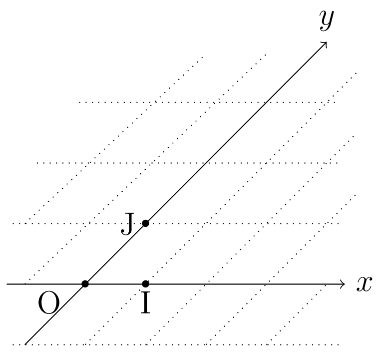
1 Repères et coordonnées

1.1 Repères

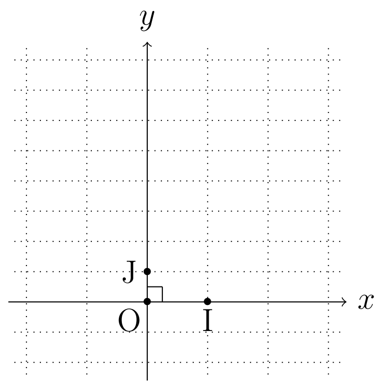
Définition 1

Définir un repère du plan, c'est choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O, I, J. On note ce repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$ et :
- O est appelé origine du repère ;
- la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe ;
- la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

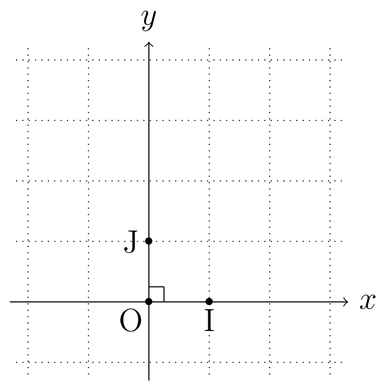
Trois types de repères



Repère quelconque



Repère orthogonal
$(\mathrm{OI})\perp(\mathrm{OJ})$



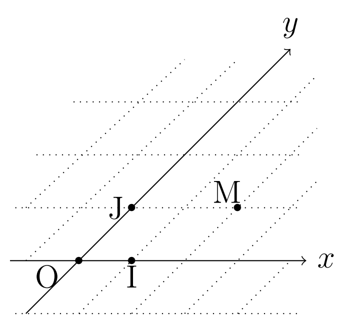
Repère orthonormé
$(\mathrm{OI})\perp(\mathrm{OJ})$ et $\mathrm{OI}=\mathrm{OJ}$

1.2 Coordonnées d'un point dans un repère

Définition 2

Soit M un point du plan muni du repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$. M est alors repéré par un unique couple de réels $(x\,;y)$.
On dit que :
- $(x\,;y)$ est le couple des **coordonnées** du point M dans ce repère ;
- x est l'**abscisse** de M ;
- y l'**ordonnée** de M.

Exemple. On a représenté ci-dessous le point $\mathrm{M}\,(2\,;1)$



2 Notion de fonction, d'image et d'antécédent

Définition 3

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$. Définir une fonction f sur $\mathcal{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathcal{D}$, un unique réel noté $f(x)$ et appelé image de x. On note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

$$x \in \mathcal{D} \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow f(x)$$

Définition 4

- $\mathcal{D}$ est appelé l'**ensemble de définition** de f.
- Si y est **L'image** de x par la fonction f, on écrit $y = f(x)$
- Si $y = f(x)$, on dit aussi que x est **UN antécédent** de y par la fonction f.

Remarque.

- En général, $\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Cela correspond à tous les nombres que l'on peut placer dans la « machine » f.
- Un nombre de l'ensemble de définition admet toujours une seule image.
- Un nombre peut admettre un, plusieurs ou aucun antécédents.

Exemple.

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array} \right.$. Quelle est l'image de 2 par f ?

Solution :
$f : 2 \longmapsto 2^2 + 3 = 7$.
L'image de 2 par la fonction f est donc 7. On écrit aussi $f(2) = 7$.

$$2 \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow 7$$

Remarque.

Dans l'exemple précédent, on dit aussi que 2 est un antécédent de 7 par la fonction f. Ce n'est pas le seul car $f : -2 \longmapsto (-2)^2 + 3 = 7$ donc -2 est un autre antécédent de 7 par f.

Définition 5

On appelle **courbe représentative** de f, notée $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$$

Exemple.

On considère la fonction $f : \begin{cases} [0\,;10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{cases}$.

Le point M $(3\,;12)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Solution :

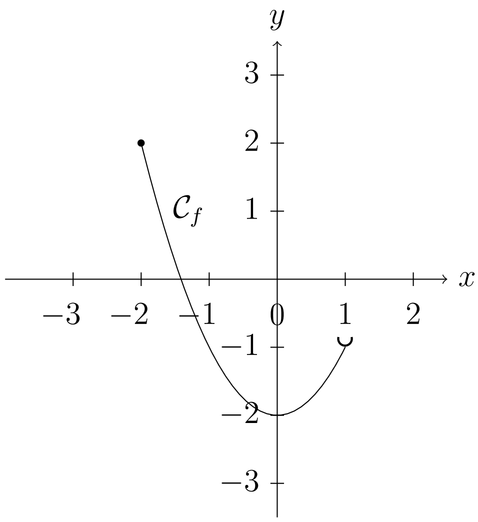
- D'une part, $3 \in [0\,;10]$.
- D'autre part, $f : 3 \longmapsto 3^2+3 = 12$. On a donc bien $f(3)=12$

Ainsi, le point $M\,(3\,;12)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

3 Trois façons d'utiliser une fonction

Dans les trois paragraphes suivants, il s'agit de la même fonction, définie successivement par une courbe, un tableau de valeurs ou une expression algébrique.

3.1 Fonction donnée par une courbe



L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \big[-2\,;1\big[$.

L'image de 0 par la fonction f est -2.

L'image de -1 par la fonction f est -1.

$-1{,}5$ admet deux antécédents par f : environ 0,5 et $-0{,}6$.

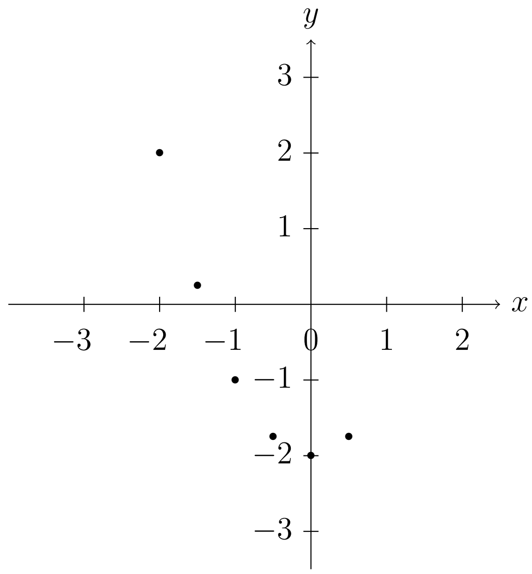
3 n'admet pas d'antécédent par f.

Remarque.

Sur la courbe, on voit que l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \big[-2\,;1\big[$ car le point d'abscisse -2 appartient à la courbe alors que le point d'abscisse 1 n'appartient pas à la courbe (il est exclu par un crochet vers l'extérieur).

3.2 Fonction donnée par un tableau de valeurs

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$f(x)$	2	$0{,}25$	-1	$-1{,}75$	-2	$-1{,}75$	



On a représenté les points correspondants aux valeurs du tableau dans le plan muni du repère ci-contre.

3.3 Fonction donnée par une expression algébrique

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;1[$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-2\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-2 \end{array} \right.$$

Calculer par exemple l'image de 0 et de 0,5 par la fonction f.

Solution :

- $f(0) = 0^2 - 2 = -2$.
  L'image de 0 par f est donc -2.

- $f(0{,}5) = 0{,}5^2 - 2 = -1{,}75$.
  L'image de 0,5 par f est donc $-1{,}75$.

Bilan

	Avantages	Inconvénients
Courbe	• Visuel • Facilité de lecture	• Valeurs approchées (imprécises) • On ne voit pas toute la courbe lorsque la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Tableau de valeurs	• Valeurs exactes • Facilité de lecture	• On n'a qu'un nombre fini de valeurs alors que la courbe contient une infinité de points.
Expression algébrique	• Valeurs exactes • Possibilité de calculer toutes les images.	• Calculs à effectuer parfois compliqués

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer l'image d'un nombre réel par une fonction.
- Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) d'un réel par une fonction.
- Déterminer si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction.
- Représenter graphiquement une fonction dont on donne une expression algébrique.
- Étudier une fonction à l'aide d'une courbe, d'un tableau de valeurs ou d'une expression algébrique et faire le lien entre ces différents modes de représentation.