Lycée Lucie Aubrac - 2$^{\text{nde}}$

Chapitre 5
Probabilités

Table des matières

1 Expérience aléatoire et événements

1.1 Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition 1

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. Il se note Ω (« Omega » en grec).

Exemple.

- Si on lance un dé à six faces et dont les faces sont numérotées de 1 à 6, l'univers est $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.
- Si on lance une pièce de monnaie, en notant P = Pile et F = Face, l'univers est $\Omega = \{\mathrm{P}\,;\,\mathrm{F}\}$.

1.2 Vocabulaire des événements

Définition 2

- Un **événement** A est un sous-ensemble de l'univers Ω, c'est-à-dire que A est un ensemble tel que $\mathrm{A} \subset \Omega$.
- Une issue x_i **réalise** l'événement A si $x_i \in \mathrm{A}$.
- Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement impossible** est l'ensemble vide noté $\emptyset$.
- L'**événement certain** est l'univers Ω.

Remarque.
Un événement est un ensemble. Cependant, on peut aussi décrire cet ensemble par une phrase. Par exemple, si on lance un dé à six faces, l'événement $\mathrm{A} = \{2\,;\,4\,;\,6\}$ est l'événement suivant :

A : « Obtenir un résultat pair »

Exemple.
On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Dire si les événements suivants sont des événements certains, impossibles, élémentaires ou non élémentaires.

1. A : « Obtenir un nombre irrationnel » ;
2. B : « Obtenir un multiple de 5 » ;
3. C : « Obtenir un nombre inférieur ou égale à 6 » ;
4. D : « Obtenir un diviseur de 4 ».

Solution :

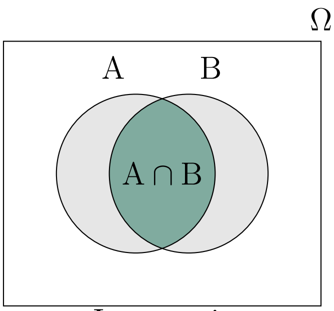
1. $A = \emptyset$ est l'événement impossible.
2. $B = \{5\}$ est un événement élémentaire.
3. $C = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$ est l'événement certain
4. $D = \{1,\ 2,\ 4\}$ est un événement non élémentaire.

1.3 Intersection, réunion et événement contraire

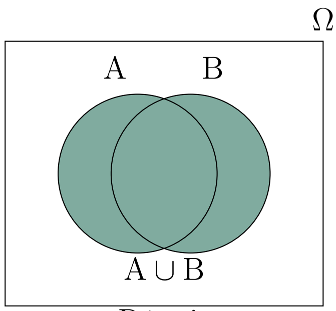
Définition 3

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

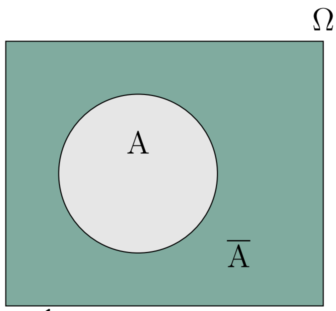
- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
- La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux).
- L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui ne réalisent pas A.



Intersection



Réunion



Événement contraire

Remarque.
L'événement contraire est parfois aussi appelé événement complémentaire.

Exemple.
On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note $A = \{2\,;\,5\}$ et $B = \{2\,;\,4\,;\,6\}$
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Solution :
$A \cap B = \{2\}$
$A \cup B = \{2\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$
$\overline{A} = \{1\,;\,3\,;\,4\,;\,6\}$
$\overline{B} = \{1\,;\,3\,;\,5\}$

Définition 4

Deux événements A et B sont dits **incompatbiles** si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque.
Si A est un événement, les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

2 Probabilité d'un événement

2.1 Loi de probabilité

Définition 5

Définir **une loi de probabilité** sur un univers $\Omega = \left\{x_1;\, x_2, \ldots,\, x_n\right\}$ consiste à attribuer à chacune des issues x_i un nombre $p_i \in [0\,;1]$, appelé probabilité de x_i, et tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Exemple.
On lance un dé équilibre à six faces. La loi de probabilité correspondant au lancer est décrite par le tableau suivant :

issues possibles x_i	1	2	3	4	5	6
probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme chaque issue a la même probabilité de se produire, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Méthode – Déterminer la loi de probabilité sur un univers Ω

On forme le tableau suivant :

issues possibles x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
probabilité p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

2.2 Probabilité d'un événement

Définition 6

La **probabilité d'un événément A**, notée $\mathrm{P(A)}$, est la somme de toutes les probabilités associées aux issues qui le réalise.

Exemple.
On lance un dé équilibre à six faces. On note A : « Obtenir 1 ou 2 ». Alors,

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Proposition 1

- La probabilité de l'événement certain vaut 1 : $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
- La probabilité de l'événement impossible vaut 0 : $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A, on a :

$$0 \leqslant \mathrm{P(A)} \leqslant 1.$$

Proposition 2

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{nombres d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Remarque.
Attention ! Cette formule n'est vraie que dans un cas d'équiprobabilité. Par exemple, si un dé est truqué, les probabilités de chaque face ne seront pas toutes égales et l'égalité de la propriété 2 ne sera pas vérifiée.

Exemple.
On lance un dé équilibre à six faces. On note A : « Obtenir un résultat pair ». Alors,

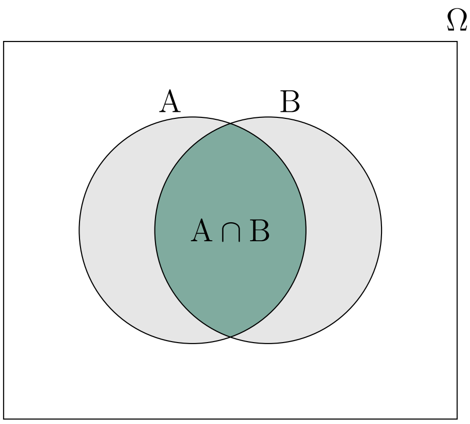
$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2.3 Réunion, intersection et événement contraire

Proposition 3

Soient A et B deux événements. Alors,

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$



Démonstration.
Pour compter les issues de $\mathrm{A \cup B}$, il faut sommer les issues de A et de B. Néanmoins, en faisant cela, on compte deux fois les issues de $\mathrm{A \cap B}$. Il faut donc soustraire par le nombre d'issues de $\mathrm{A \cap B}$ et on obtient :

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

□

Remarque.
Si deux événements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire si $\mathrm{A \cap B} = \emptyset$, alors

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

Cela découle directement du fait que $\mathrm{P(A \cap B)} = 0$.

Proposition 4

Soit A un événement. Alors,

$$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}).$$

Exemple.
On lance une pièce truquée telle que la probabilité de l'événement A : « Obtenir Pile » est 0,6. Quelle est la probabilité de l'événement B : « Obtenir Face » ?

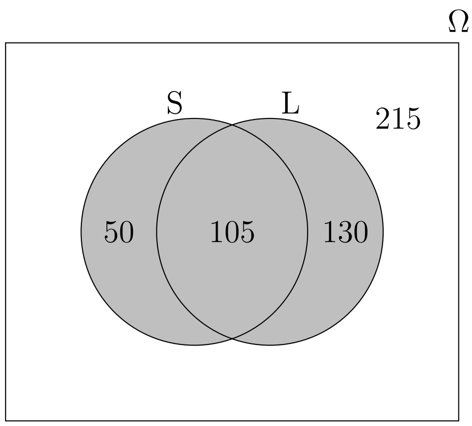
Solution :
$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

3 Choix d'une méthode : diagramme, tableau ou arbre ?

3.1 Utilisation d'un diagramme

Exemple.
Dans une ville, on interroge un échantillon de 500 personnes représentatif de la population. Parmi elles, 155 pratiquent un sport régulièrement et 235 ont une activité de loisir autre que sportive. Enfin, 105 personnes déclarent avoir une activité sportive et une activité de loisir non sportive. On choisit une personne au hasard dans la ville. Quelle est la probabilité qu'elle ne pratique aucune activité ?

Solution :
On note S : « la personne fait une activité sportive » et L : « la personne fait une activité de loisir non sportive ». On représente la situation par le diagramme suivant.



La probabilité cherchée est donc :

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}} \cap \overline{\mathrm{L}}) = \frac{215}{500} = 43\%.$$

3.2 Utilisation d'un tableau

Exemple.
Dans une entreprise de 450 salariés, il y a 270 hommes et 180 femmes. Par ailleurs, les salariés se répartissent en deux catégories : les cadres et les ouvriers. On sait plus précisément qu'il y a 80 cadres et que le nombre de femmes cadres est de 45. On tire au hasard un salarié parmi les hommes. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un ouvrier ?

Solution :
On réalise le taleau suivant donnant le nombre de salariés pour chaque catégorie (hommes/ femmes et cadres/ouvriers).

	cadres	ouvriers	Total
femmes	45	135	180
hommes	35	235	270
Total	80	370	450

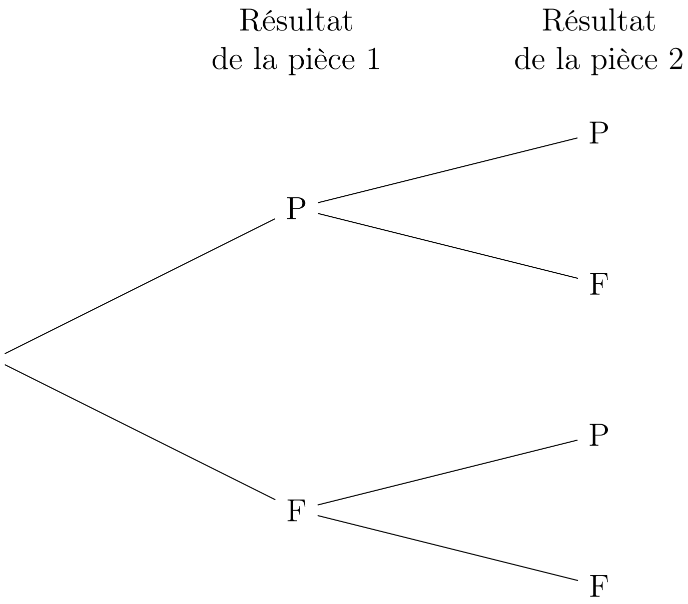
La probabilité cherchée est donc :

$$p = \frac{35}{270} = \frac{7}{54} \simeq 0{,}13.$$

3.3 Utilisation d'un arbre

Exemple.
On lance deux pièces équilibrées. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un Pile ?

Solution :
On note P : « Obtenir Pile » et F : « Obtenir Face ». L'expérience peut alors se représenter par l'arbre suivant :



Au total, il y a quatre possibilités (PP ; PF ; FP ; FF). La probabilité d'obtenir un Pile correspond donc aux issues PF et FP. On a donc :

$$p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Savoir-faire du chapitre

- Modéliser une expérience aléatoire : définir l'univers et les événements correspondant au problème.
- Faire le lien entre le langage naturel et le langage symbolique liés aux événements.
- Calculer la probabilité d'un événement.
- Calculer la probabilité de la réunion ou de l'intersection de deux événements.
- Calculer la probabilité de l'événement contraire.
- Utiliser un diagramme, un tableau ou un arbre pour résoudre un problème.