Lycée Lucie Aubrac - 2$^{\text{nde}}$

Chapitre 2
Arithmétique

Table des matières

1 Divisibilité

Définition 1

Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que a **divise** b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On dit également que a est un **diviseur** de b ou que b est un **multiple** de a.

Exemple.
5 divise 30 car $30 = 6 \times 5$.

Définition 2

Si un nombre est divisible par 2, on dit qu'il est pair. S'il n'est pas divisible par 2, on dit qu'il est impair.

Proposition 1

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
- a est pair si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$.
- a est impair si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.

Démonstration.
Cela découle directement de la Définition 1. □

2 Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Histoire – Crise des irrationnels

La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a provoqué une véritable crise dans les mathématiques grecques. À l'époque, les mathématiciens considéraient en effet que le monde physique peut se comprendre à travers des rapports de longueurs entières (autrement dit des nombres rationnels). Une légende dit même que le mathématicien **Hippase de Métaponte** (500 av. J.-C.) qui a découvert le caractère « incommensurable » (irrationnel) de $\sqrt{2}$ a été condamné à la noyade par ses condisciples. Si cela n'est pas du tout assuré historiquement, il n'en reste pas moins que cette histoire traduit les difficultés qu'ont eu les grecs à accepter l'existence de nombres irrationnels.

Hippase de Métaponte

Proposition 2 – (Lemme)

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors,

- a est pair $\iff$ a^2 est pair.
- a est impair $\iff$ a^2 est impair.

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- On suppose que a est pair.
  Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
  Donc $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$.
  On pose $k' = 2k^2$.
  On a donc $a^2 = 2k'$, ce qui signifie que a^2 est pair.
- On suppose que a est impair.
  Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.
  Donc $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.
  On pose $k' = 2k^2 + 2k$.
  On a donc $a^2 = 2k' + 1$, ce qui signifie que a^2 est impair.
- On suppose que a^2 est pair.
  On souhaite montrer que a est nécessairement pair.
  En fait, si a était impair, on a montré que a^2 serait impair, ce qui serait absurde.
- On raisonne de même pour montrer que si a^2 est impair, alors a est impair.

□

Proposition 3

Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration.
On suppose par l'absurde qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux (avec $b \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$.
Ainsi, en élevant cette égalité au carré, on obtient :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Donc $a^2 = 2b^2 \quad (*)$
Cela signifie que a^2 est pair et donc que a est pair d'après le lemme précédent (propriété 2).
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.
En réinjectant dans l'égalité (*), on obtient : $4k^2 = 2b^2$ donc $2k^2 = b^2$.
Cela signifie que b^2 est pair et donc que b est pair d'après le lemme précédent.
Finalement, a et b sont tous les deux pairs, ce qui est absurde car ils ont été supposés premiers entre eux. □

3 Nombres premiers et décomposition

Définition 3

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Exemples.
La liste des nombres premiers inférieurs à 30 est la suivante : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Remarque.
L'entier 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'un seul diviseur.

Proposition 4

Si un entier n n'est divisible par aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

Démonstration.
Soit n un entier qui n'est divisible par aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$. Supposons par l'absurde que n n'est pas un nombre premier.
Il existerait donc des entiers a et b (avec $a \neq 1$ et $b \neq 1$) tels que $n = a \times b$.
Comme n ne possède aucun diviseur compris entre 2 et $\sqrt{n}$, on en déduit que $a > \sqrt{n}$ et que $b > \sqrt{n}$. Mais cela est absurde car on aurait alors :

$$\begin{aligned} & a \times b > \sqrt{n} \times \sqrt{n} \\ \text{donc} \quad & a \times b > n \end{aligned}$$

$\square$

Méthode – Déterminer si un entier n est premier ou non

Il suffit de tester tous les diviseurs possibles entre 2 et $\sqrt{n}$

Remarque.
Si un entier n'est pas divisible par 2, il ne sera divisible par aucun nombre pair.
Il est donc également inutile de tester la divisibilité par 4, 6, 8, 10, etc. pour prouver qu'un nombre est premier.

Exemple.
L'entier 61 est-il premier ?

Solution :
$\sqrt{61} < 8$. Comme 61 est impair, il suffit de tester tous les diviseurs impairs entre 2 et 7
- 61 n'est pas divisible par 3 car $6 + 1 = 7$ n'est pas divisible par 3.
- 61 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités est 0.
- 61 n'est pas divisible par 7 car le reste de la division de 61 par 7 est 5 ($61 = 8 \times 7 + 5$).

Finalement, cela signifie que 61 est un nombre premier.

Proposition 5 – (admise)

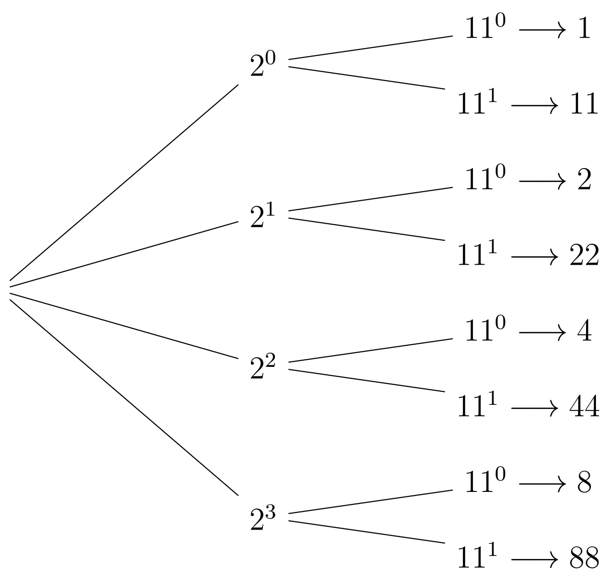
Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe des nombres premiers distincts p_1, p_2, $\dots$, p_k et des entiers α_1, α_2, $\dots$, α_k tels que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$.
De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Méthode – Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier

- Décomposer l'entier en produit de nombres premiers.
- Énumérer les diviseurs en utilisant un arbre permettant de lister les différentes possibilités.

Exemple.
Déterminer l'ensemble des diviseurs de 88.

Solution :
$88 = 2^3 \times 11$ donc ses diviseurs sont de la forme $2^{k_1} \times 11^{k_2}$, avec $0 \leqslant k_1 \leqslant 3$ et $0 \leqslant k_2 \leqslant 1$.
L'arbre suivant permet d'énumérer toutes les possibilités.



Ainsi, les diviseurs de 88 sont 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44 et 88.

Définition 4

Soient n et m deux entiers relatifs.

- Le PGCD de m et n, noté $\text{PGCD}(m\,;n)$, est le plus grand diviseur commun de m et de n.
- Le PPCM de m et n, noté $\text{PPCM}(m\,;n)$, est le plus petit multiple commun de m et de n.

Proposition 6

Soient n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On suppose, quitte à utiliser des exposants nuls, que m et n peuvent s'écrire sous forme de produit de nombres premiers de la manière suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}.$$

On a alors :

- $\text{PGCD}(n\,;m) = p_1^{\min(\alpha_1\,\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2\,\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\min(\alpha_k\,\beta_k)}$
- $\text{PPCM}(n\,;m) = p_1^{\max(\alpha_1\,\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2\,\beta_2)} \times \ldots \times p_k^{\max(\alpha_k\,\beta_k)}$

Exemple.

Les décompositions de 126 et 196 sont $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $196 = 2^2 \times 3^0 \times 7^2$.
Par conséquent, $\text{PGCD}(126\,;196) = 2^1 \times 3^0 \times 7^1 = 14$.
De plus, $\text{PPCM}(126\,;196) = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = 1764$.

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer si un nombre est premier ou non.
- Décomposer un nombre en produit de nombres premiers.
- Déterminer les diviseurs d'un entier à partir de la décomposition en nombres premiers.
- Déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers à partir de la décomposition en facteurs premiers.