Lycée Lucie Aubrac - 2nde

Chapitre 1
Nombres et ensembles de nombres

Table des matières

1 Ensembles de nombres

Définition 1

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des entiers positifs ou nuls : $0, 1, 2, \ldots$. Il est noté $\mathbb{N}$.

Définition 2

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble des entiers positifs ou nuls et des entiers négatifs : $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Il est noté $\mathbb{Z}$.

Définition 3

L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec a qui appartient à $\mathbb{Z}$ et b qui appartient à $\mathbb{N}$ en étant différent de 0. Il est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple. $\frac{5}{4}$ est un nombre rationnel.

Définition 4

L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a qui appartient à $\mathbb{Z}$ et n appartient à $\mathbb{N}$. Il est noté $\mathbb{D}$.

Exemple.

- $\frac{15}{100}$ est un nombre décimal.
- $5,677$ est un nombre décimal car $5,677 = \frac{5677}{1000} = \frac{5677}{10^3}$.

Proposition 1

Les nombres décimaux correspondent exactement aux nombres s'écrivant avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Démonstration.

- Supposons qu'un nombre x est un nombre décimal.
  Par définition, il existe des entiers a et n tels que $x = \frac{a}{10^n}$. Ainsi, x s'obtient à partir de a en décalant la virgule de n rang vers la gauche. Le nombre x n'a donc qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.
- Réciproquement, supposons que x ne s'écrit qu'avec un nombre fini de chiffres après la virgule noté n. En multipliant x par 10^n, on obtient un nombre entier que l'on note a. Ainsi, $x \times 10^n = a$ et donc $x = \frac{a}{10^n}$.

$\square$

Proposition 2

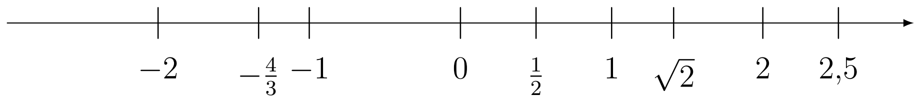
$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Remarque. Le fait que $\frac{1}{3} \simeq 0{,}333333\ldots$ et qu'il semble avoir un nombre infini de chiffres après la virgule n'est pas une preuve que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. C'est simplement une conjecture et, *a priori*, le fait qu'il ait un nombre infini de chiffres après la virgule n'est pas évident. Au contraire, c'est en montrant que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal que l'on pourra en déduire que son écriture décimale est infinie.

Démonstration.
On suppose par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Ainsi, il existerait des entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
On en déduirait que $3a = 10^n$.
Cela signifierait donc que 10^n est un multiple de 3. Comme cela n'est pas le cas, c'est que notre hyptohèse de départ est fausse. Autrement dit, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. □

Définition 5

L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres connus en classe de seconde. Il est noté $\mathbb{R}$. Par ailleurs, tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique.



Proposition 3 – (admise)

Il existe des nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels.
Par exemple, $\sqrt{2}$ et π ne pas des nombres rationnels.
On dit que ce sont des nombres irrationnels.

Tableau récapitulatif des ensembles de nombres

Nom	Symbole	Exemples
Ensemble des entiers naturels	$\mathbb{N}$	$0\,;\,1\,;\,2\,;\,\dots$
Ensemble des entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	$\dots-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\dots$
Ensemble des nombres décimaux	$\mathbb{D}$	$-5\,;\,2{,}5\,;\,\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{-1}{5}$
Ensemble des nombres rationnels	$\mathbb{Q}$	$45\,;\,-\dfrac{5}{2}\,;\,15{,}6\,;\,\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{15}{7}\,;\,\dots$
Ensemble des nombres réels	$\mathbb{R}$	$0\,;\,-18{,}7\,;\,\dfrac{45}{17}\,;\,\sqrt{2}\,;\,\sqrt{5}\,;\,\pi\,;\,\dots$

Définition 6

- Un ensemble E privé d'une valeur a se note $E \setminus \{a\}$.
- Un ensemble privé de la valeur 0 se note $E \setminus \{0\}$ ou encore E^*.
- L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est noté $\emptyset$.

Exemples.

- $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ désigne l'ensemble de tous les nombres entiers naturels sauf 3.
- $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble tous les nombres réels sauf 0.
- $\mathbb{Q}^*$ désigne l'ensemble de tous les nombres rationnels sauf 0.

2 Relation entre les ensembles

Définition 7

- Si un nombre x **appartient** à un ensemble E, on note $x \in E$.
- Si un nombre x **n'appartient** pas à un ensemble E, on note $x \notin E$.
- Soient E et F des ensembles. Si pour tout $x \in E$, on a $x \in F$, on dit que E est **inclus** dans F. On note $E \subset F$.

Exemples.

- $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.
- $-7 \in \mathbb{Q}$ car $-7 = \dfrac{-7}{1}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ car si $x \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ car si $x \in \mathbb{Z}$, on peut toujours écrire $x = \dfrac{x}{1}$, ce qui prouve que $x \in \mathbb{Q}$.

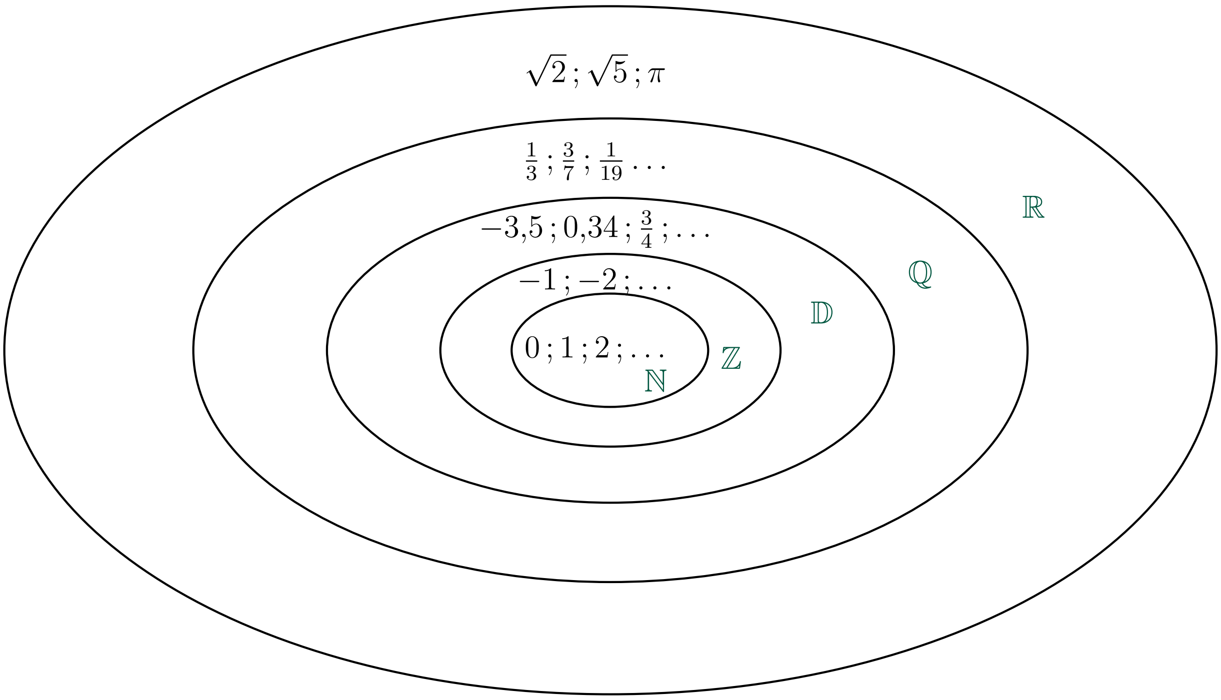
Proposition 4

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Démonstration.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ est évident car si x est un entier positif alors c'est un entier relatif (positif ou négatif).
- Montrons que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
  Soit $x \in \mathbb{Z}$. Alors $x = \dfrac{x}{10^0}$ donc $x \in \mathbb{D}$. Cela prouve donc que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Montrons que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
  Soit $x \in$. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $\in \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{a}{10^n}$. Cela signifie que x s'écrit bien comme une fraction de nombres entiers et donc que $x \in \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est évident car $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble de tous les nombres.

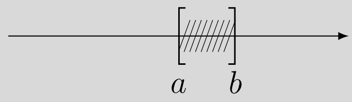
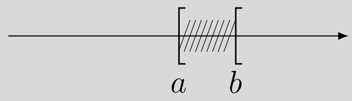
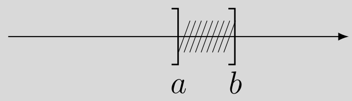
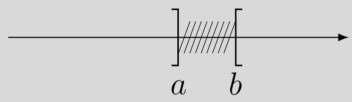
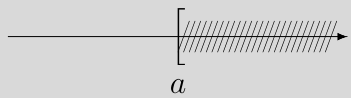
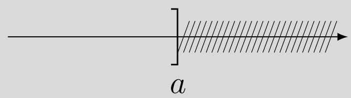
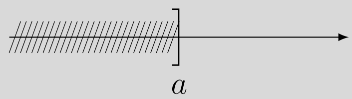
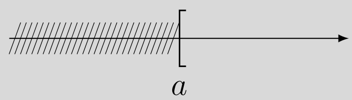
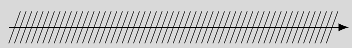
□



3 Intervalles

Définition 8

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ correspondant à l'une des neuf formes suivantes :

Encadrement	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a\,;b[$	
$a < x \leqslant b$	$]a\,;b]$	
$a < x < b$	$]a\,;b[$	
$x \geqslant a$	$[a\,;+\infty[$	
$x > a$	$]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant a$	$]-\infty\,;a]$	
$x < a$	$]-\infty\,;a[$	
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$	

Définition 9

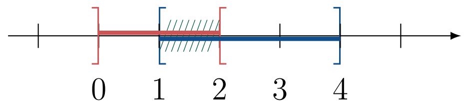
Soient I et J deux intervalles.

- L'**intersection** de I et de J, notée $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$, est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à I et à J.
- La **réunion** de I et de J, notée $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$, est l'ensemble des nombres appartenant à I ou à J.

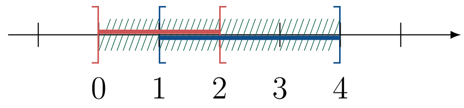
Remarque.
En mathématiques, « appartenir à I **ou** à J » signifie « appartenir à l'un des deux ou aux deux ».

Exemples.
Si $\mathrm{I} = \left]0\,;2\right[$ et $\mathrm{J} = [1;4]$ alors :

- $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \left[1\,;2\right[$



- $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \left]0\,;4\right]$



4 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 10

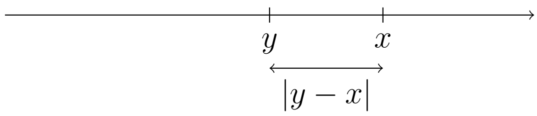
Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est notée $|x|$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple.
- $|2| = 2$ (car $2 \geqslant 0$) ;
- $|-2| = -(-2) = 2$ (car $-2 < 0$).

Proposition 5

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- La distance entre x et 0 est $|x|$.
- La distance entre x et y est $|y - x|$.



Démonstration.
- La distance entre x et 0 est x ou $-x$ selon si x est positif ou négatif. C'est, par définition, la valeur absolue de x.
- La distance entre x et y est $y - x$ si $y \geqslant x$ et $x - y$ si $x \geqslant y$. Dans tous les cas, il s'agit bien de la valeur absolue $|y - x|$ car $x - y = -(y - x)$.

□

Savoir-faire du chapitre

- Connaître les ensembles de nombres et en donner des exemples.
- Connaître et savoir utiliser les relations entre les ensembles de nombres.
- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle sur la droite graduée. Déterminer si un nombre appartient à un intervalle ou non.
- Utiliser la valeur absolue.