Lycée Lucie Aubrac - 2nde

Chapitre 12
Applications de la colinéarité

Table des matières

1 Équation d'une droite **2**
- 1.1 Équation cartésienne d'une droite 2
- 1.2 Équation réduite d'une droite 3

2 Vecteur directeur et coefficient directeur **4**
- 2.1 Vecteur directeur 4
- 2.2 Coefficient directeur 5

3 Droites parallèles et droites sécantes **6**

1 Équation d'une droite

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1.1 Équation cartésienne d'une droite

Proposition 1 – (admise)

Si D est une droite, alors il existe $a, b, c \in R$ tels que :

$$\mathrm{M}(x\,;y) \in D \iff ax + by + c = 0.$$

Définition 1

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle équation cartésienne de D.

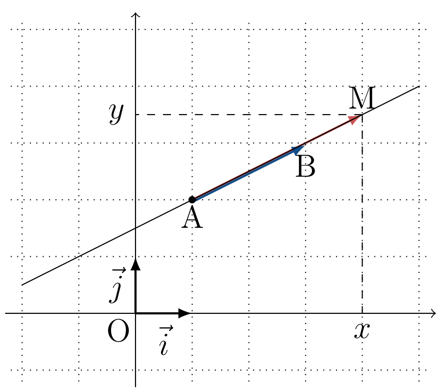
Remarque.
L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. Par exemple, si une droite D a pour équation cartésienne $x + 3y - 1 = 0$ alors l'équation $2x + 6y - 2 = 0$ est aussi une équation cartésienne de D car :

$$x + 3y - 1 = 0 \iff 2x + 6y - 2 = 0.$$

Méthode – Déterminer l'équation cartésienne d'une droite

- On considère un point $\mathrm{M}(x\,;y)$.
  On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
- On utilise l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x\,;y) \in (\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0. \end{aligned}$$



Exemple.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $\mathrm{A}(1\,;2)$ et $\mathrm{B}(-3\,;5)$.

Solution : Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$.

- On a $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.
- Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in(\mathrm{AB}) &\iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0\\ &\iff (x-1)\times 3-(y-2)\times(-4)=0\\ &\iff 3x+4y-11=0\end{aligned}$$

1.2 Équation réduite d'une droite

Proposition 2

Soit D une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

- Si $b\neq 0$, alors il existe $m,p\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\mathrm{M}(x\,;y)\in D \iff y=mx+p \ \text{(équation réduite)}.$$

- Si $b=0$, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{M}(x\,;y)\in D \iff x=k.$$

Démonstration.

- Supposons que $b\neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x\,;y)\in D &\iff ax+by+c=0\\ &\iff by=-ax-c\\ &\iff y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \quad (\text{car } b\neq 0)\\ &\iff y=mx+p \quad \left(\text{en posant } m=-\frac{a}{b} \text{ et } p=-\frac{c}{b}\right).\end{aligned}$$

- Supposons que $b=0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x\,;y)\in D &\iff ax+by+c=0\\ &\iff ax+c=0\\ &\iff x=\frac{-c}{a}\\ &\iff x=k \quad \left(\text{en ponsant } k=-\frac{c}{a}\right).\end{aligned}$$

□

Remarque.

- Le cas $b\neq 0$ correspond aux droites représentatives de fonction affines.
  Le cas $b=0$ correspond aux droites parallèles à l'axe des ordonnées.
- L'avantage d''une équation cartésienne par rapport à l'équation réduite réside dans le fait que toute droite admet une équation cartésienne. Avec l'équation cartésienne, il n'y a donc pas de distinction à effectuer entre les droites parallèles à l'axe des ordonnées ou non.

2 Vecteur directeur et coefficient directeur

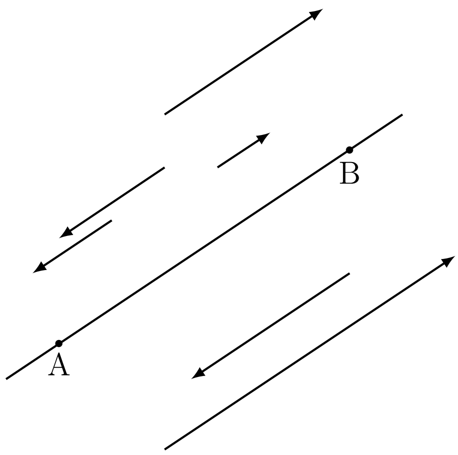
2.1 Vecteur directeur

Définition 2

On appelle vecteur directeur d'une droite (AB) tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Remarque.
Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

Exemple.
Tous les vecteurs représentés ci-dessous sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).



Proposition 3

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by+c=0$.

Démonstration.
On considère deux points distincts $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}) \in D$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}\,;y_{\mathrm{B}}) \in D$. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\vec{u}\right) = (-b)(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}) - a(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}) = (ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}) - (ax_{\mathrm{B}+by_{\mathrm{B}}).}$$

Or, $\mathrm{A} \in D$ donc $ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}} = -c$. De même, $\mathrm{B} \in D$ donc $ax_{\mathrm{B}}+by_{\mathrm{B}} = -c$.
Finalement,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\vec{u}\right) = (-c)-(-c) = 0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc c'est un vecteur directeur de D. □

Exemple. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\ 2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $2x-9y+3=0$.

2.2 Coefficient directeur

Définition 3

Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$.
On sait que l'équation peut se mettre sous sa forme réduite $y = mx + p$.
Le nombre réel m est appelé **coefficient directeur** de D.

Proposition 4

Si l'équation réduite d'une droite D est $y = mx+p$, alors le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Démonstration.
Une équation cartésienne de D est $-mx + y - p = 0$.
D'après la propriété 4, un vecteur directeur de D est donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-m\end{pmatrix}$.
Or, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{v} = -\vec{u}$. Par conséquent, $\vec{v}$ est également un vecteur directeur de D. $\square$

Remarque.
On retrouve le fait que pour une droite de coefficient directeur m, lorsque l'on se déplace d'une unité vers la droite, on se déplacera verticalement de m unités.

Proposition 5

Soit D une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et soient deux points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ quelconques et distincts appartenant à D. Alors,

$$m = \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}.$$

Démonstration.
Par définition de l'équation d'une droite, on a $y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p$ et $y_\mathrm{A} = mx_\mathrm{A} + p$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} &= \frac{(mx_\mathrm{B} + p) - (mx_\mathrm{A} + p)}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \\
&= \frac{mx_\mathrm{B} + p - mx_\mathrm{A} - p}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \\
&= \frac{m\,(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} \\
&= m
\end{aligned}$$

$\square$

3 Droites parallèles et droites sécantes

Proposition 6

Deux droites sont parallèles (éventuellement confondues) si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Proposition 7

Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Alors,

$$\mathrm{M}(x\,;y) \in D \cap D' \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$