Lycée Lucie Aubrac - 2^{nde}

Chapitre 15
Colinéarité de vecteurs

Table des matières

1 Définition et première propriété

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Définition 1

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Remarque.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1,5\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{u} = 2\vec{v}$.

Proposition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Démonstration.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\vec{u} = \lambda\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$ □

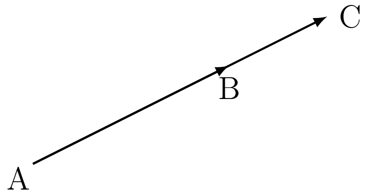
2 Caractérisation géométrique de la colinéarité

Proposition 2

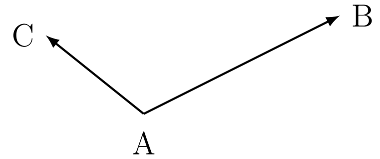
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

Proposition 3

Soient A, B et C trois points deux à deux disctincts.
Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.



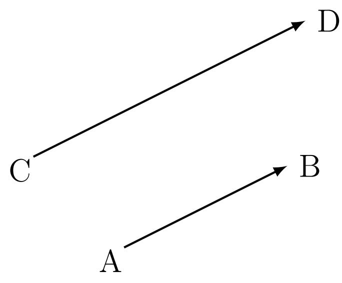
Vecteurs colinéaires



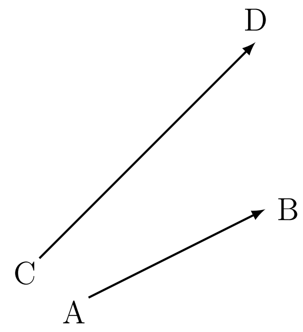
Vecteurs non colinéaires

Proposition 4

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Vecteurs colinéaires



Vecteurs non colinéaires

3 Caractérisation algébrique de la colinéarité

Proposition 5

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Démonstration.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = \lambda\vec{v}. \\ &\iff \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \lambda x' \text{ et } y = \lambda y'. \\ &\iff \text{les coordonnées de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \text{ sont proportionnelles.} \end{aligned}$$

□

Définition 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - yx'.$$

Proposition 6

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

Démonstration.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- On suppose que $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \lambda x' \text{ et } y = \lambda y'.\\
&\iff \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{x}{x'} = \lambda \text{ et } \frac{y}{y'} = \lambda\\
&\iff \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}\\
&\iff xy' = yx'\\
&\iff xy' - yx' = 0\\
&\iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0
\end{aligned}$$

- Supposons que $x' = 0$: Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff x = 0\\
&\iff xy' - yx' = 0\\
&\iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0
\end{aligned}$$

- Dans le cas où $y' = 0$, on raisonne de même.

$\square$

Exemple.
Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 1 \times 5 - 2 \times 3 = -1$. Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.