Lycée Lucie Aubrac - 2nde

Chapitre 14
Repérage du plan

Table des matières

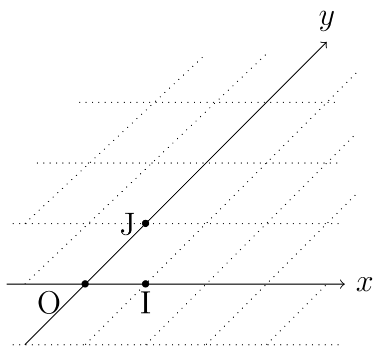
1 Repères et coordonnées

1.1 Repères

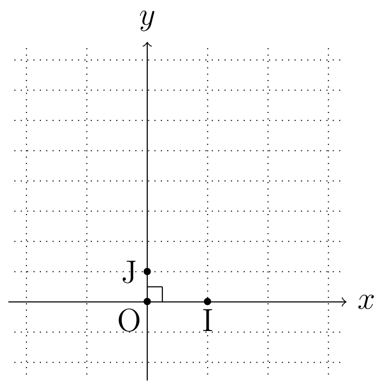
Définition 1

Définir un repère du plan, c'est choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O, I, J. On note ce repère (O ; I , J) et :
- O est appelé origine du repère ;
- la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe ;
- la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

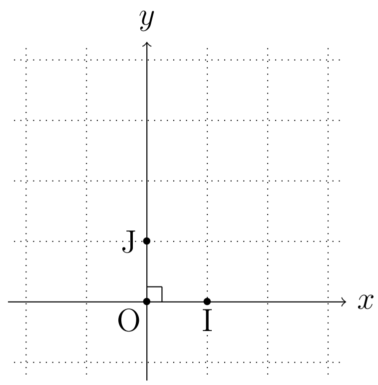
Trois types de repères



Repère quelconque



Repère orthogonal
(OI)⊥(OJ)



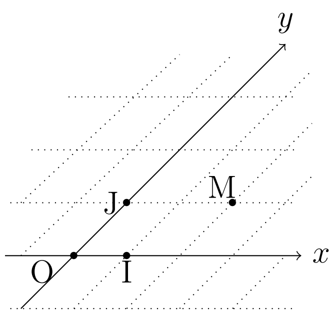
Repère orthonormé
(OI)⊥(OJ) et OI = OJ

1.2 Coordonnées d'un point dans un repère

Définition 2

Soit M un point du plan muni du repère (O ; I , J). M est alors repéré par un unique couple de réels $(x\,;y)$.
On dit que :
- $(x\,;y)$ est le couple des **coordonnées** du point M dans ce repère ;
- x est l'**abscisse** de M ;
- y l'**ordonnée** de M.

Exemple. On a représenté ci-dessous le point M (2 ; 1)



1.3 Coordonnées du milieu d'un segment

Dans toute la suite du cours, on considère que le plan est muni d'un repère (O ; I , J).

Proposition 1

On considère les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B). Si K est le milieu de [AB], alors I a pour coordonnées :

$$\mathrm{K}\left(\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}\,;\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}\right)$$

Remarque.
Autrement dit, l'abscisse du milieu est la moyenne des abscisses de A et de B et l'ordonnée du milieu est la moyenne des ordonnées de A et de B.

Exemple.
Dans un repère (O ; I , J), si A(2 ; 1) et B(−2 ; 3), déterminer les coordonnées du milieu de [AB].

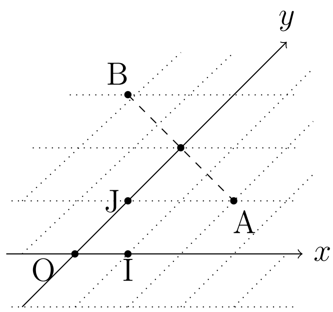
Solution :

On note K le milieu de [AB].
Ses coordonnées sont :

$$K\left(\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}\,;\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}\right)$$

$$K\left(\frac{2+(-2)}{2}\,;\frac{1+3}{2}\right)$$

$$K\,(0\,;2)$$



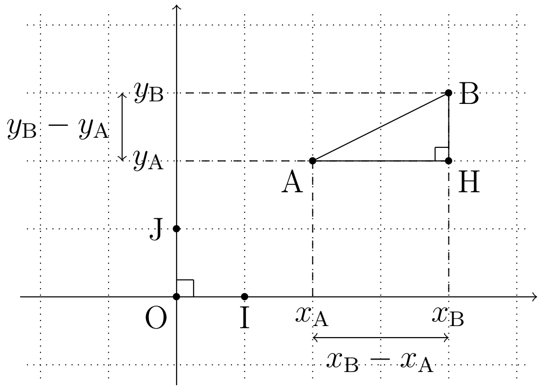
1.4 Calcul de longueurs dans un repère orthonormé

Proposition 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I , J), on considère les points A($x_{\mathrm{A}\,;y_{\mathrm{A}}}$) et B($x_{\mathrm{B}}$; y_{B}). La longueur AB est :

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}$$

Démonstration.
Soient $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})}$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ deux points du plan munis d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$.
On note H le point de coordonnées $\mathrm{H}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{A})$.
Comme les axes du repère sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.



⋆ **On sait que :** ABH est rectangle en H.
On utilise le théorème de Pythagore.
On peut conclure que :
$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$

⋆ **On sait que :** $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$, que $\mathrm{AH}=x_B-x_A$ et que $\mathrm{BH}=y_B-y_A$
On peut conclure que :
$\mathrm{AB}^2=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2$.

Par conséquent, $\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}$

□

Remarque.
Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le théorème de Pythagore. Pour cette raison, il est indispensable que le repère soit orthonormé pour pouvoir appliquer la formule de la longueur.

Exemple.
Dans un repère orthonormé, on considère les points $\mathrm{A}(1\,;2)$ et $\mathrm{B}(3\,;7)$. Calculer la longueur AB.

Solution :
Le repère est orthonormé donc :

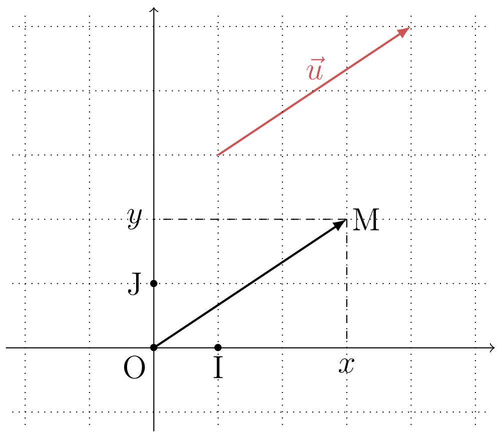
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}\\&=\sqrt{(3-1)^2+(7-2)^2}\\&=\sqrt{2^2+5^2}\\&=\sqrt{4+25}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

2 Vecteurs et repères

2.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 3

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M, image du point O par la translation de vecteur $\vec{u}$. De plus, si x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Remarque.
M est l'unique point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

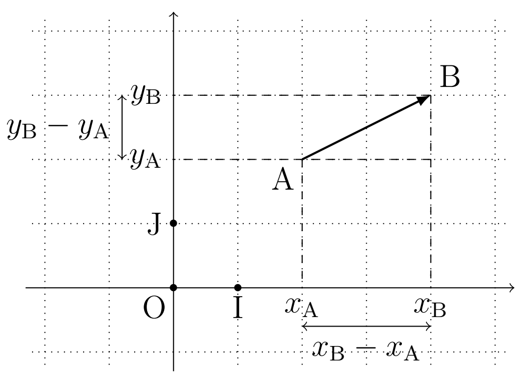
Proposition 3

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les même coordonnées.

Proposition 4

Soient $A(x_\text{A}\,;y_A)$ et $B(x_\text{B}\,;y_\text{B})$ deux points. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_\text{B} - x_\text{A} \\ y_\text{B} - y_\text{A} \end{pmatrix}$$



Exemple.
Soient A$(1\,;3)$ et B$(4\,;8)$ deux points du plan. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Solution :
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\8-3\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

2.2 Norme d'un vecteur

Proposition 5

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. On a alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Démonstration.
Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On considère deux points A et B tel que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$.
On a donc (d'après la propriété 2) :

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (\star)$$

Or, comme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on en déduit (d'après la propriété 4), que $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$.
En remplaçant dans l'égalité $(\star)$, il vient :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

□

Exemple.
Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$, on considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. Calculer sa norme.

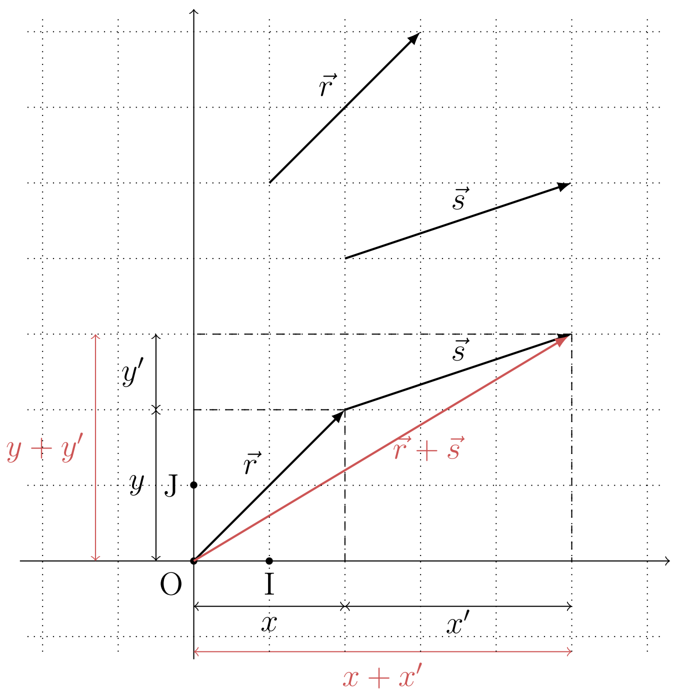
Solution :
Le repère est orthonormé.
On a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20}$

2.3 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Proposition 6

Soient $\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Les coordonnées de $\vec{r}+\vec{s}$ sont :

$$\vec{r}+\vec{s}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}.$$



Exemple.
Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.4 Coordonnées et multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Proposition 7

Soit $\vec{u}$ un vecteur et λ un nombre réel. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

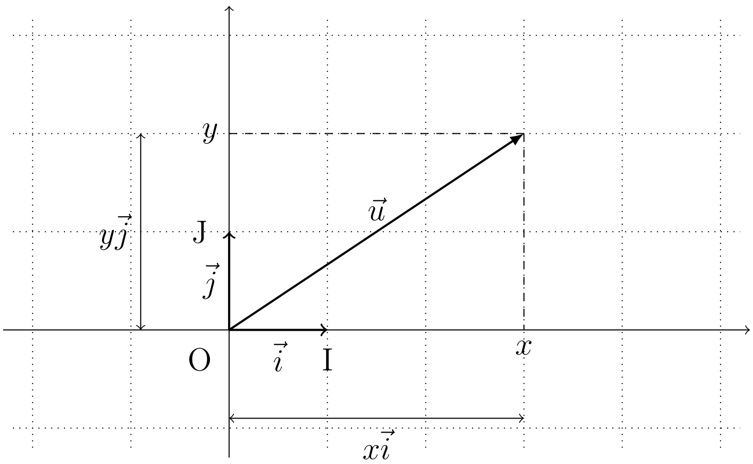
Exemple.
On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors : $3\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.5 Décomposition d'un vecteur

Proposition 8

Dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$, on note $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\vec{j}$. Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$



Démonstration.
Le vecteur $\vec{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ a pour coordonnées $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc $x\vec{i}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$.

De plus, le vecteur $\vec{j}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ a pour coordonnées $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc $y\vec{j}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$.

Ainsi, en sommant, on voit que les coordonnées de $x\vec{i}+y\vec{j}$ sont $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Par conséquent, les vecteurs $x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{u}$ ont même coordonnées et sont donc égaux. □

Remarque.
En général, on préfère définir un repère par la donnée d'un point O (l'origine) et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On note alors $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ce repère. Il correspond au repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$ où les points I et J sont tels que $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\vec{j}$.
De plus, on dit le couple de vecteurs $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est la **base** du repère.