Lycée Lucie Aubrac - 2nde

Chapitre 13
Vecteurs

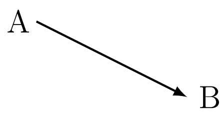
Table des matières

1 Définitions et généralités

Définition 1

Soient A et B deux points du plan. La translation qui envoie A sur B est matérialisée par un **vecteur**, noté $\overrightarrow{AB}$, et caractérisé par :

- sa **direction** ;
- son **sens** ;
- sa longueur, appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.



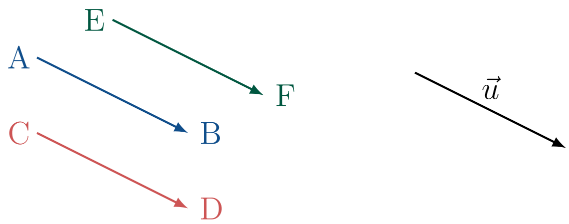
Remarque.
Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B est son extremité.

Définition 2

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils définissent la même translation.

Exemple.
Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ ci-dessous sont égaux. On dit que ce sont des **représentants** d'un même vecteur abstrait, noté $\vec{u}$. De plus, on note :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \vec{u}$$



Proposition 1

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont même direction, même sens et même norme.

Définition 3

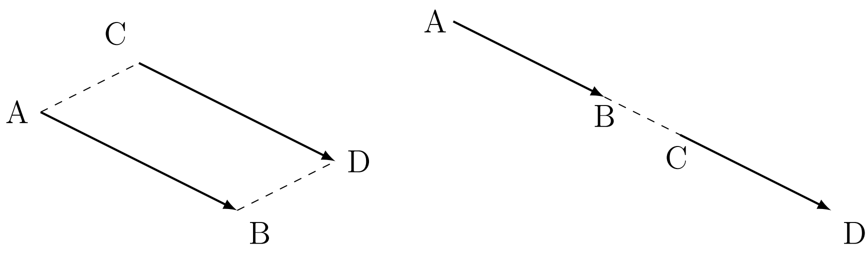
- Quel que soit le point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et on note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

2 Égalité de vecteurs et configurations

Proposition 2

Pour tous points A, B, C et D distincts :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \text{ABDC est un parallélogramme (éventuellement applati).}$$



Démonstration.

- Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On va montrer que ABDC est un parallélogramme.

  ⋆ **On sait que :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
  On utilise la propriété 1 : Si deux vecteurs sont égaux, alors ils ont même direction, même sens et même norme.
  On peut conclure que : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme. En particulier, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et AB = CD.

  ⋆ **On sait que :** dans le quadrilatère ABDC, les côtés opposés [AB] et [DC] sont parallèles et de même longueur.
  On utilise la propriété : Si un quadrilatère possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
  On peut conclure que : ABDC est un parallélogramme.

- Réciproquement, supposons que ABDC est un parallélogramme.
  On va montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

  ⋆ **On sait que :** ABDC est un parallélogramme.
  On utilise la propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
  On peut conclure que : les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que AB = CD.

  ⋆ Ainsi, on a démontré que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction et même norme. Par ailleurs, le quadrilatère est ABDC (et non pas ABCD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens.

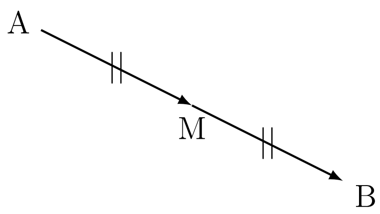
  ⋆ **On sait que :** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme.
  On utilise la propriété 1 : Si deux vecteurs ont même direction, même sens et même norme, alors ils sont égaux.
  On peut conclure que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

□

Proposition 3

Pour tous points A, B et M distincts :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} \iff \text{M est le milieu de [AB]}$$



Démonstration.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{MB}} \text{ ont même direction, même sens et même norme.} \\
&\iff \text{(AM) et (MB) sont parallèles, le sens de A vers M est le même} \\
& \text{que celui de M vers B et AM} = \text{MB.} \\
&\iff \mathrm{A, M} \text{ et B sont alignés dans cet ordre et AM} = \text{MB} \\
&\iff \text{M est le milieu de [AB]}
\end{aligned}$$

□

3 Addition de vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel

3.1 Définition de l'addition de vecteurs

Proposition 4

L'enchaînement successif de deux translations est également une translation.

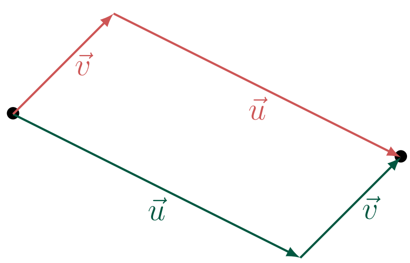
Définition 4

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on définit la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ comme étant la succession de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v} + \vec{u}$.

Proposition 5

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

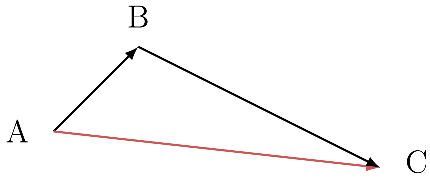


3.2 Cas particuliers remarquables

Proposition 6 – Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



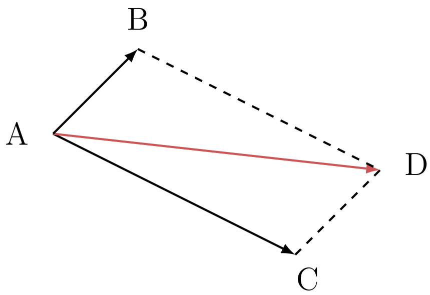
Démonstration.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est la succession de translations qui transforme A en B puis B en C. Elle transforme donc A en C et c'est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. □

Proposition 7 – Identité du parallélogramme

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où D est l'unique point tel que ABDC est un parallélogramme.



Démonstration.

On sait que : ABDC est un parallélogramme.
On utilise la proriété 1 : Si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
On peut conclure que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} \quad \text{(d'après la relation de Chasles)} \end{aligned}$$

□

Définition 5

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Exemple.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (d'après la relation de Chasles).

3.3 Multiplication d'un vecteur par un réel

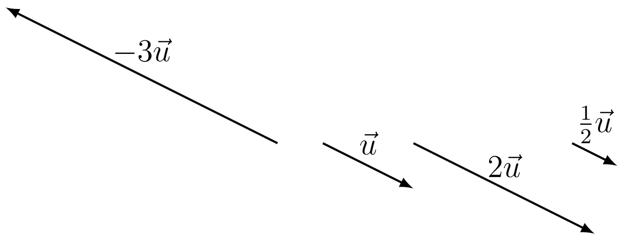
Définition 6

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda > 0$ alors $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont même direction, même sens et $\|\lambda\vec{u}\| = \lambda\|\vec{u}\|$.
- Si $\lambda < 0$ alors $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont même direction, sont de sens contraire et $\|\lambda\vec{u}\| = -\lambda\|\vec{u}\|$.
- Si $\lambda = 0$ alors $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque.
Dans tous les cas, on a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Exemple.



Proposition 8

Soient $\vec{r}$ et $\vec{s}$ deux vecteurs et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors :

- $(\lambda + \mu)\vec{r} = \lambda\vec{r} + \mu\vec{r}$
- $\lambda(\vec{r} + \vec{s}) = \lambda\vec{r} + \lambda\vec{s}$
- $\lambda(\mu\vec{r}) = (\lambda\mu)\vec{r}$.

Exemple.
Illustration du deuxième point de la Proposition 8 avec $\lambda = 2$: $2(\vec{r} + \vec{s}) = 2\vec{r} + 2\vec{s}$