# Géométrie des quadrilatères et des triangles – Exercices

| | Chercher | Modéliser | Représenter | Raisonner | Calculer | Comm. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Exercices ⋆ | 26, 27 | 11 | 9, 10, 22, 23, 34, 35 | 2, 4, 8, 26, 27 | 1, 8, 9, 10, 11, 18, 22, 23 | 18, 26, 27 |
| Exercices ⋆⋆ | 6, 14, 19, 21, 28, 30, 31, 37, 38, 40, 41 | 12 | 13, 16, 40, 41 | 3, 5, 6, 17, 19, 21, 28, 30, 31 | 12, 13, 14, 16, 24, 37, 38, 40, 41 | 5, 6, 13, 14, 17, 19 |
| Exercices ⋆ ⋆ ⋆ | 15, 20, 25, 29, 32, 33, 39 | | 36 | 20, 29, 32, 33, 36 | 15, 25, 39 | 15, 20 |

## Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Compléter le tableau ci-dessous.

| Mesure de l'angle $\alpha$ | Mesure de l'angle $\beta$ | Les angles $\alpha$ et $\beta$ sont : |
|---|---|---|
| 11° | | complémentaires |
| 67° | 113° | |
| | 1,2° | supplémentaires |
| | 79,74° | complémentaires |
| 81,96° | 9,04° | |

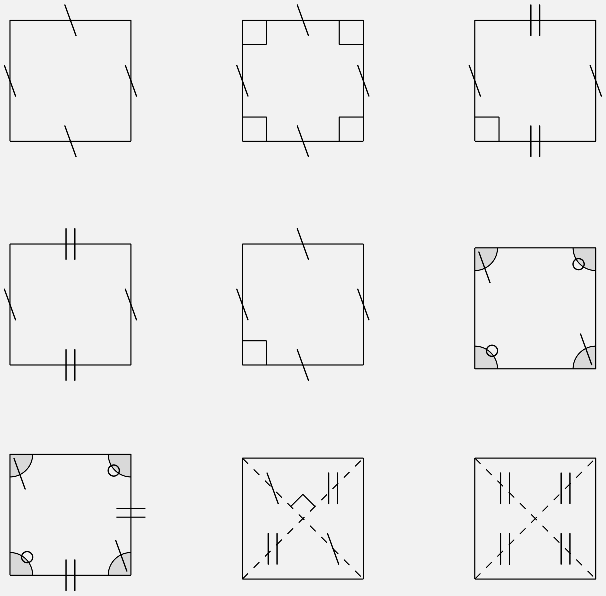
## Exercice 2 ⋆ [Raisonner]

Pour chacune des propriétés ci-dessous, indiquer successivement si les parallélogrammes, les losanges, les rectangles et les carrés vérifient la propriété.

1. Les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
2. Les diagonales se coupent en leur milieux.
3. Les diagonales sont perpendiculaires.
4. Les diagonales sont de même longueur.
5. Les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.
6. Deux côtés consécutifs sont perpendiculaires.
7. Les quatre côtés ont même longueur.
8. Les angles opposés sont de même mesure.

## Exercice 3 ⋆⋆ [Raisonner]

Indiquer la nature de chacun de ces quadrilatères.



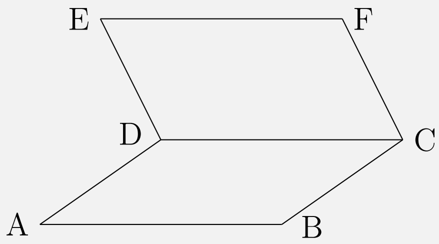
## Exercice 4 ⋆ [Raisonner]

Pour chacune des propriétés ci-dessous, indiquer si elle est Vraie ou Fausse. Indiquer de plus si sa réciproque est Vraie ou Fausse.

1. Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un rectangle.
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un losange.
3. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il a au moins deux côtés opposés parallèles.
4. Si un quadrilatère est un losange et qu'il possède un angle droit, alors c'est un carré.
5. Si un quadrilatère est un losange et qu'il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.
6. Si un quadrilatère est un rectangle et que ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un carré.
7. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
8. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieux.

## Exercice 5 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Dans la figure ci-dessous, ABCD et CDEF sont des parallélogrammes. Montrer que les droites (AE) et (DF) sont parallèles.



### Exercice 6 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et soient [AB] et [CD] deux diamètres de ce cercle.

1. Conjecturer la nature du quadrilatère ACBD.
2. Démontrer cette conjecture.

### Exercice 7 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

Soit ABCD un losange et E un point du segment [AB]. On considère le point F, intersection de la droite (CD) et de la parallèle à (BD) passant par E.

1. Conjecturer la nature du quadrilatère BDFE.
2. Démontrer cette conjecture.

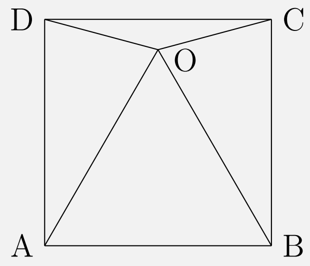
### Exercice 8 ⋆ [Raisonner, Calculer]

Dans chaque cas, déterminer si un tel triangle ABC existe.

1. $AB = 3{,}1\,\text{cm}$, $AC = 3{,}1\,\text{cm}$, $BC = 7{,}1\,\text{cm}$.
2. $AB = 3{,}1\,\text{cm}$, $AC = 4{,}2\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$.
3. $\widehat{ABC} = 10°$, $\widehat{ACB} = 101°$, $\widehat{ABC} = 79°$.
4. $AB = 3{,}4\,\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{BAC} = 90°$.

### Exercice 9 ⋆ [Raisonner, Calculer]

Déterminer la mesure de tous les angles de la figure ci-dessous sachant que ABCD est un carré et que ABO est un triangle équilatéral.




### Exercice 10 ⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AB = 3\,\text{cm}$ et $BC = 5\,\text{cm}$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

### Histoire – Pythagore

Le mathématicien grec **Pythagore (VI^e siècle av.J.C.)** n'a pas découvert le théorème qui porte son nom étant donné que ce résultat était utilisé plus d'un millénaire avant, en Mésopotamie notamment. L'apport des mathématiciens grecs a toutefois été de proposer la première démonstration générale et théorique de ce théorème.

### Exercice 11 ⋆ [Modéliser, Calculer]

La taille d'un écran est souvent donnée à l'aide de la taille de sa diagonale en pouces (un pouce correspond à 2,54 cm).

1. Mesure à la règle la largeur et la longueur de l'écran de votre ordinateur portable (arrondir la mesure à $10^{-1}$ cm près).
2. En déduire, en pouces, la taille de la diagonale de l' écran de votre ordinateur.

**Exercice 12 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]**

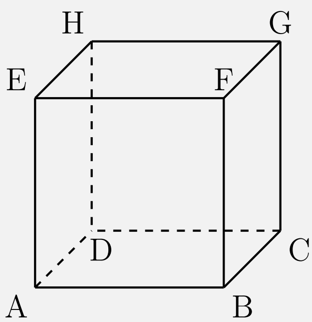
On construit une étagère que l'on considérera comme étant un parallélépipède rectangle de dimension $200\,\text{cm} \times 95\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$. Au départ, cette étagère est en position couchée et on souhaite la relever. Sera-t-il possible de le faire sachant que l'on se trouve dans une pièce dont la hauteur sous plafond est de $2{,}05\,\text{m}$.

**Exercice 13 ⋆⋆ [Représenter, Calculer, Communiquer]**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[MN]$ et tel que $MN = 3$. On considère un point L appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et tel que $LM = 6$. Déterminer la longueur LN.

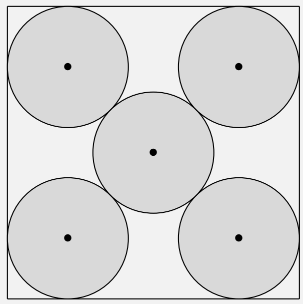
**Exercice 14 ⋆⋆ [Chercher, Calculer, Communiquer]**

On considère le cube ABCDEFGH de côté $AB = 1$ représenté ci-dessous. Déterminer la longueur de la grande diagonale AG.




**Exercice 15 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer, Communiquer]**

Cinq cercles de rayon 1 ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.



**Exercice 16 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]**

Une légende raconte qu'au VI$^{\text{e}}$ siècle av.J.C., le pharaon Amasis aurait demandé au mathématicien grec Thalès d'estimer la hauteur de la pyramide de Khéops. Thalès prit alors un batôn d'une longueur de deux coudées qu'il positionna verticalement. Som ombre sur le sol était de 2,6 coudées. Il mesura par ailleurs l'ombre formée par la pyramide. Elle faisait 215,4 coudées. Estimer la hauteur de la pyramide de Khéops. On donnera le résultat en coudées, arrondi à $10^{-1}$ près.

Remarque : la coudée est une unité de mesure de l'Egypte antique qui mesure entre 52 et 54 cm

### Histoire – Thalès

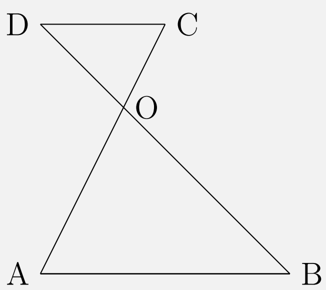
Rien indique que le mathématicien grec Thalès ait découvert ou démontré ce théorème et il n'a d'ailleurs pas toujours été associé au théorème qui porte aujourd'hui son nom. En effet, l'appelation « théorème de Thalès » ne date que du XIXe siècle ap.J.C. après qu'une directive ministérielle ait demandé aux enseignants d'attribuer plus fréquemment des noms aux résultats classiques des programmes. À noter enfin qu'en allemand ou en anglais, on ne parle pas de « théorème de Thalès ». Les anglais le traduisent par *intercept theorem* (théorème d'interception) et les allemands par *Strahlensatz* (théorème des rayons).

### Exercice 17 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Montrer que la proposition suivante est fausse : Si les points A, R, M et A, S, N sont alignés et si $\dfrac{AR}{AM} = \dfrac{AS}{AN}$, alors (RS)//(MN).

### Exercice 18 ⋆ [Calculer, Communiquer]

Sur la figure ci-dessous, on donne les informations suivantes : OA = 7 cm, OB = 8 cm, OC2 = 2,6 cm et OD = 3 cm. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?




### Exercice 19 ⋆⋆ [Raisonner, Chercher, Communiquer]

Soit ABC un triangle et I, J et K les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].

1. Conjecturer la nature du quadrilatère IJCK.
2. Démontrer cette conjecture.

### Exercice 20 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Chercher, Communiquer]

Soit ABCD un quadrilatère quelconque. On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Que peut-on dire du quadilatère IJKL ? Le démontrer (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Varignon).

### Histoire – Varignon

**Pierre Varignon (1654-1722)** était un père jésuite (membre de la Compagnie de Jésus) et mathématicien français. Il est connu pour ses travaux en mathématiques et en physique, en particulier sur les forces.

### Exercice 21 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]

Inventer un sujet d'exercice dont la question finale est : montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

### Exercice 22 ⋆ [Calculer, Représenter]

Dans chaque question, le triangle ABC est rectangle en A. À l'aide de la calculatrice, déterminer, dans chaque cas, la mesure des trois angles du triangle. On arrondira à 0,1° près.

1. AB = 5 cm et BC = 7 cm
2. AB = 2 cm et AC = 2 cm
3. AC = 2 cm et BC = 4 cm

**Exercice 23 ⋆ [Calculer, Représenter]**

Dans chaque question, le triangle KLM est rectangle en K. À l'aide de la calculatrice, déterminer, dans chaque cas, la longueur des trois côtés du triangle. On arrondira à 0,1 cm près.

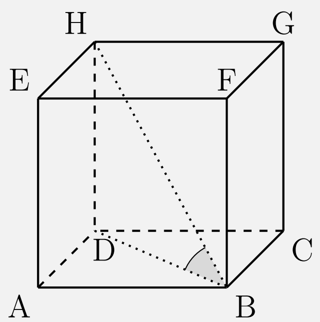
1. $KL = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{KLM} = 25°$
2. $KL = 3\,\text{cm}$ et $\widehat{KLM} = 37°$
3. $LM = 10\,\text{cm}$ et $\widehat{KML} = 41°$

**Exercice 24 ⋆⋆ [Calculer]**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\cos(\widehat{ABC}) = 0{,}5$. Déterminer la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$.

**Exercice 25 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]**

On considère le cube ABCDEFGH de côté $AB = 4$ représenté ci-dessous.




1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{DBH}$.
2. Si la longueur du côté est différent de 4, la mesure de l'angle $\widehat{DBH}$ sera t-il la même ?

**Exercice 26 ⋆ [Chercher, Raisonner, Communiquer]**

Soit ABC un triangle quelconque. Soit D le symétrique de B par rapport à C. Montrer que, dans le triangle ABM, la droite (AC) est la médiane issue de A.

**Exercice 27 ⋆ [Chercher, Raisonner, Communiquer]**

On considère un losange ABCD de centre O et un point M n'appartenant pas à la droite (AC). Montrer que, dans le triangle AMC, (OM) est la médiane issue de M.

**Exercice 28 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

Soient A et B deux points tels que $AB = 4\,\text{cm}$. Déterminer l'ensemble des points M qui sont distants de 5 cm du point A et de 3 cm de la droite (AB).

**Exercice 29 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]. De plus, M et N sont des points de ce cercle situés de part et d'autre de ce diamètre. Le droite (MN) coupe la droite (AB) en R. On définit le point S comme étant le projeté orthogonal de R sur (AM) et le point T comme étant le projeté orthogonal de R sur (AN). Démontrer que les droites (ST) et (MN) sont parallèles.

**Exercice 30 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

Montrer que si OMN est un triangle rectangle en O, alors le milieu de [MN] est le centre du cercle circonscrit au triangle OMN.

**Exercice 31 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

Montrer que si OMN est un triangle rectangle en O, alors le point O est l'orthocentre triangle OMN.

**Exercice 32 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et un point M extérieur au cercle $\mathcal{C}$. On note A' et B' les points d'intersection respectifs de (AS) et (BS) avec $C$. De plus, on note I le point d'intersection des droites (A'B) et (AB'). Montrer que (IS) $\perp$ (AB).

**Exercice 33 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]**

On considère un triangle ABC isocèle en A.

1. Montrer que la médiatrice de [BC] et la hauteur issue de A sont confondues.
2. Montrer que la médiatrice de [BC] et la médiane issue de A sont confondues.
3. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ et la médiane issue de A sont confondues.
4. Que peut-on en déduire pour le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral.

**Exercice 34 ⋆ [Représenter]**

Tracer un triangle quelconque et construire, à la règle (non graduée) et au compas, le cercle inscrit à ce triangle.

**Exercice 35 ⋆ [Représenter] Raisonner**

1. Tracer un triangle ABC tel que AB = 16 cm, AC = 15 cm, et BC = 10 cm,
2. Tracer à la règle (non graduée) et au compas :
   - le centre du cercle circonscrit à ABC ;
   - le centre de gravité de ABC ;
   - l'orthocentre de ABC.
3. Que peut-on conjecturer concernant les trois points construits ?
4. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduire la figure et faire varier la position des points. La conjecture semble-t-elle valable dans le cas général ?

**Histoire – Euler**

La conjecture précédente a été formulée par **Robert Simson (1687-1768)** au XVIIIe siècle. Quelques années plus tard, ce résultat a été démontré par **Leonhard Euler (1707-1783)**. Pour cette raison, la droite reliant le centre de gravité d'un triangle, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit s'appelle la droite d'Euler.

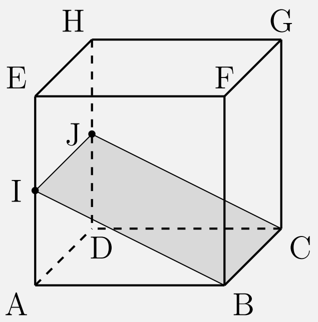
## Exercice 36 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Raisonner]

Placer deux points A et B dans le plan. Pour chaque question, tracer à la règle (non graduée) et au compas un point M vérifiant la propriété demandée.

1. $\mathrm{AM} = 2\mathrm{AB}$.
2. M est le milieu de [AB].
3. A est le projeté orthogonal de M sur [AB].
4. $\mathrm{AM} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$.
5. $\mathrm{AM} = \dfrac{4}{3}\mathrm{AB}$.
6. $\mathrm{AM} = \dfrac{7}{5}\mathrm{AB}$.
7. $\mathrm{AM} = \sqrt{2}\mathrm{AB}$.
8. $\mathrm{AM} = \sqrt{3}\mathrm{AB}$.

## Exercice 37 ⋆⋆ [Calculer, Chercher]

On considère le cube ABCDEFGH de côté $\mathrm{AB} = 1$ représenté ci-dessous. I est le milieu de [AE] et J est le milieu de [DH]




Déterminer l'aire du rectangle IJCB.

## Exercice 38 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Calculer le périmètre et l'aire d'un triangle équilatéral de côté 5 cm.

## Exercice 39 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Calculer le périmètre et l'aire d'un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1.

## Exercice 40 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

On considère un cylindre de hauteur $h$ et dont le rayon du disque de base est $r$. On note $\mathcal{V}_{cylindre}$ son volume. De plus, on considère un cône de même hauteur $h$ et dont le rayon du disque de base est $r$. On note $\mathcal{V}_{cone}$ son volume.

1. À l'aide de modèles en plastiques, et en les remplissant de liquide, conjecturer la valeur du rapport $\dfrac{\mathcal{V}_{cone}}{\mathcal{V}_{cylindre}}$.
2. Démontrer cette conjecture.

## Exercice 41 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

On considère une sphère de rayon $r$. On note $\mathcal{V}_{sphere}$ son volume. De plus, on considère un cône dont le rayon du disque de base est $r$. On note $\mathcal{V}_{cylindre}$ son volume. On sait de plus que lorsqu'ils sont posés sur le sol, la sphère et le cône ont tous les deux la même hauteur.

1. Déterminer la valeur du rapport $\dfrac{\mathcal{V}_{sphere}}{\mathcal{V}_{cylindre}}$.
2. Vérifier ce résultat à l'aide de modèles en plastiques en les remplissant de liquide.