Lycée Lucie Aubrac - 2^{nde}

Chapitre 12
Géométrie des quadrilatères et des triangles

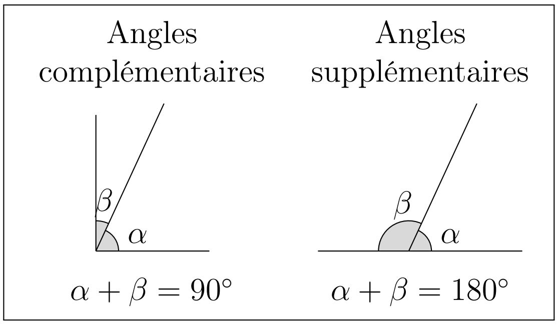
Table des matières

1 Géométrie des angles

1.1 Définitions et généralités

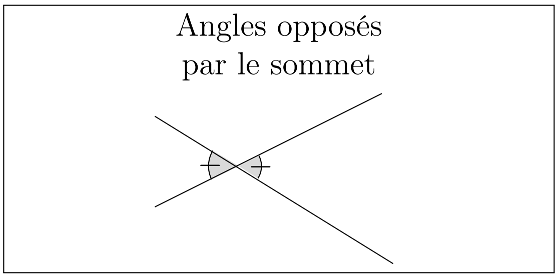
Définition 1

- Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leur mesure est égale à 90°.
- Deux angles sont **supplémentaires** lorsque la somme de leur mesure est égale à 180°.



Définition 2

Deux angles sont opposés par le sommet lorsqu'ils ont le même sommet et que les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre.

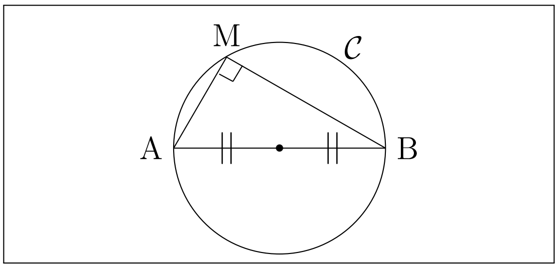


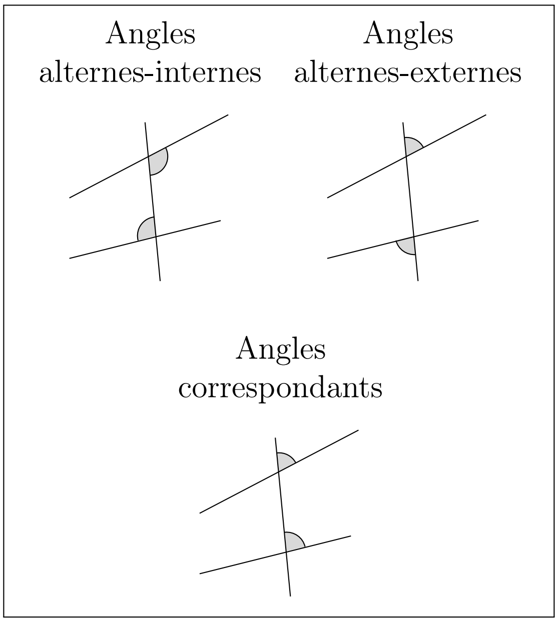
Proposition 1

Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils sont égaux.

Proposition 2

Si $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre [AB] et M un point de $\mathcal{C}$, alors $\widehat{\mathrm{AMB}} = 90°$.





Définition 3

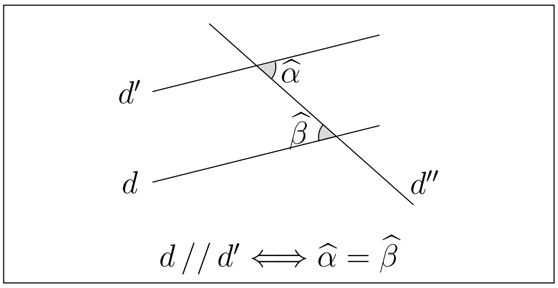
Si deux droites sont coupées par une même sécante, alors elles forment (voir dessin ci-contre) :

- deux paires d'angles alternes-internes ;
- deux paires d'angles alternes-externes ;
- quatre paires d'angles correspondants.

1.2 Parallélisme et angles

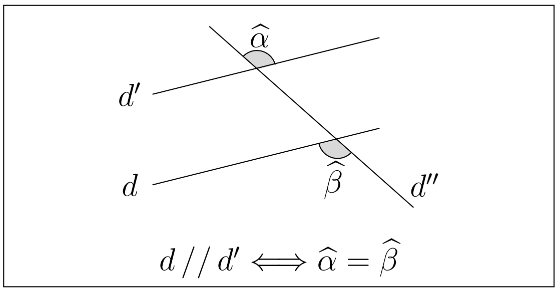
Proposition 3

Soient deux droites d et d' coupées par une même sécante d'' et formant des angles alternes-internes $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$



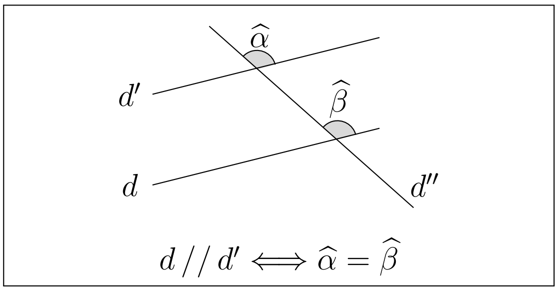
Proposition 4

Soient deux droites d et d' coupées par une même sécante d'' et formant des angles alternes-externes $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$



Proposition 5

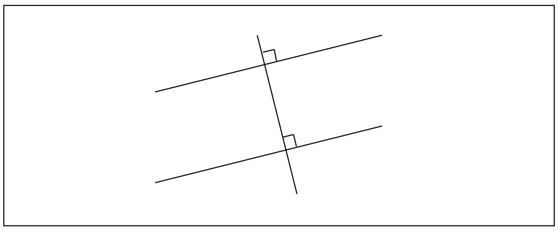
Soient deux droites d et d' coupées par une même sécante d'' et formant des angles correspondants $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$



Dans la propriété précédente, si les angles formés sont droits, on obtient la propriété suivante :

Proposition 6

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.

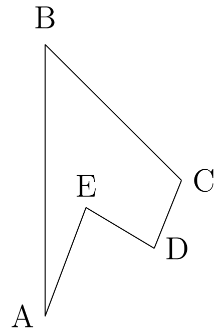


2 Géométrie des quadrilatères

Définition 4

- Un **polygone** est un ensemble de points du plan reliés entre eux par des segments. Les points sont appelés les sommets et les segments sont appelés les côtés.
- Un **quadrilatère** est un polygone à quatre sommets.

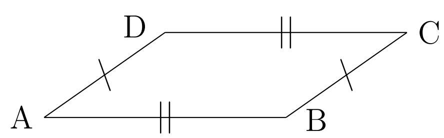
Exemple de quadrilatère
à cinq sommets



2.1 Parallélogramme

Définition 5

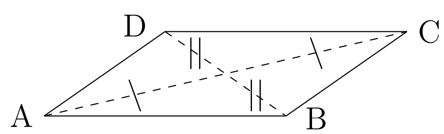
Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur.



Proposition 7

- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, il possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses angles opposés sont égaux.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieux.

Illustration du quatrième point
de la propriété 6



Remarque.
La formulation « si, et seulement si » désigne une équivalence.

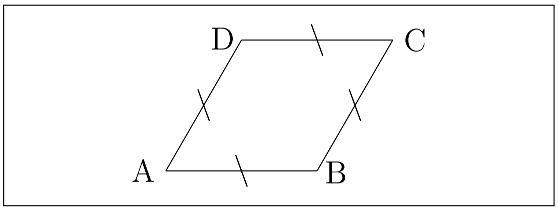
Par exemple pour le premier point de la propriété 6, cela signifie les deux choses suivantes :

- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.

2.2 Losange

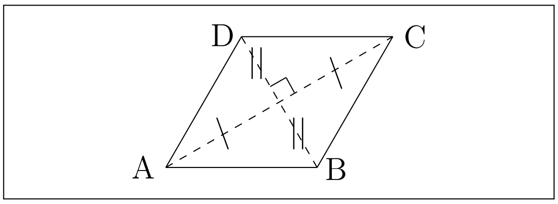
Définition 6

Un **losange** est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur.



Proposition 8

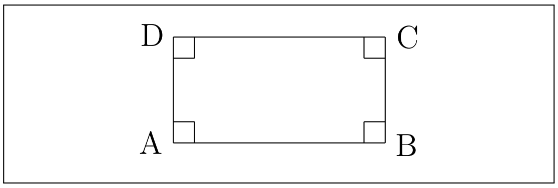
Un quadrilatère est un losange si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieux et sont perpendiculaires.



2.3 Rectangle

Définition 7

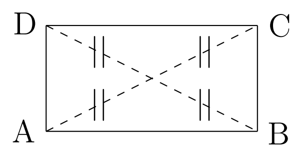
Un **rectangle** est un quadrilatère dont les quatre angles sont des angles droits.



Proposition 9

- Un quadrilatère est un rectangle si, et seulement si, il possède trois angles droits.
- Un quadrilatère est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieux et sont de même longueur.
- Un quadrilatère est un rectangle si, et seulement si, c'est un parallélogramme et qu'il possède un angle droit.

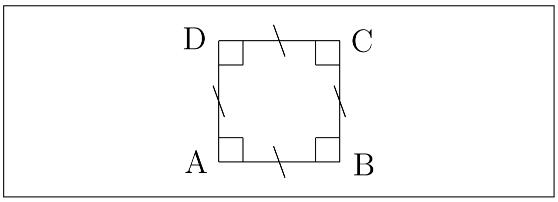
Illustration du deuxième point de la propriété 8



2.4 Carré

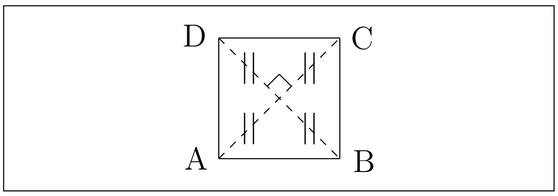
Définition 8

Un **carré** est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur et dont les quatre angles sont des angles droits.



Proposition 10

Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieux, sont de même longueur et sont perpendiculaires.



2.5 Relation entre les quadrilatères

Proposition 11

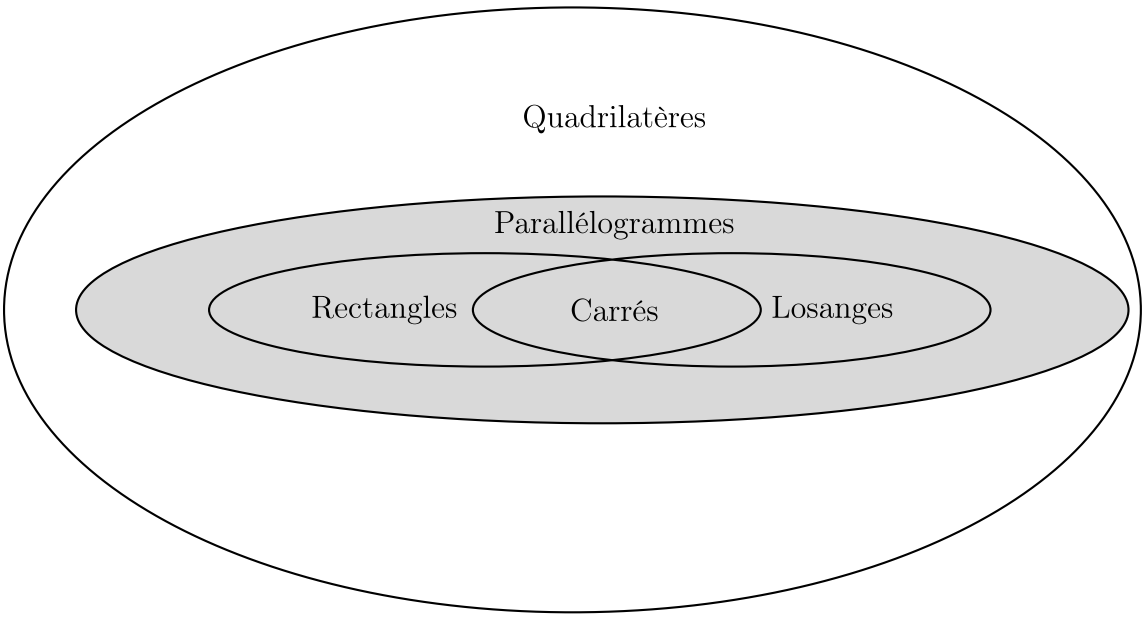
- Si un quadrilatère est un carré alors c'est un losange.
- Si un quadrilatère est un carré alors c'est un rectangle.
- Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère est un losange alors c'est un parallélogramme.

Démonstration.

- Si un quadrilatère est un carré, alors il possède quatre côtés de même longueur. C'est donc un losange.
- Si un quadrilatère est un carré, alors il possède quatre angles droits. C'est donc un rectangle.
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors il possède quatre angles droits. Par conséquent, les angles opposés sont égaux deux à deux et le quadrilatère est donc un parallélogramme (d'après la propriété 6).
- Si un quadrilatère est un losange alors il a quatre côtés égaux. Par conséquent, ses côtés opposés sont de même longueur et c'est donc un parallélogramme.

□

Remarque.
Le diagramme ci-dessous représente les relations d'inclusion de l'ensemble des quadrilatères, des parallélogrammes, des losanges, des rectangles et des carrés.

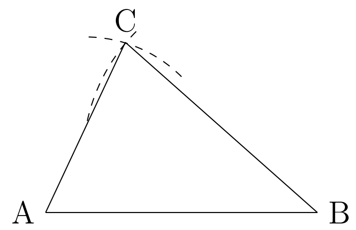


3 Géométrie des triangles

3.1 Généralités

Proposition 12

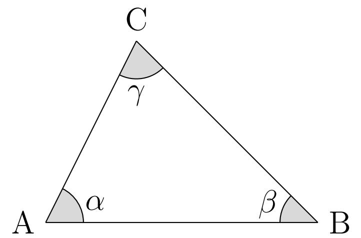
Dans un triangle ABC, la longueur d'un côté est toujours plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.



Pour que le tracé au compas soit possible, il faut que $AB \leqslant AC + BC$

Proposition 13

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.



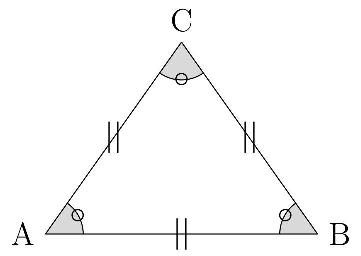
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

3.2 Triangles particuliers

Définition 9

- Un triangle ABC est équilatéral si $AB = AC = BC$.
- Un triangle ABC est isocèle en A si $AB = AC$.
- Un triangle ABC est rectangle en A si $\widehat{BAC} = 90°$.

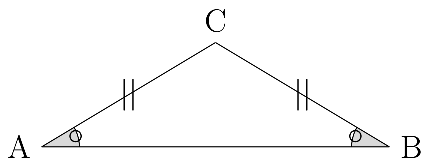
Triangle équilatéral



Proposition 14

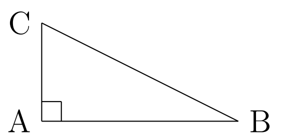
- Un triangle est équilatéral si, et seulement si, il possède trois angles égaux.
- Un triangle est isocèle si, et seulement si, il possède deux angles égaux.

Triangle isocèle



Proposition 15 – Théo. de Pythagore

Un triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

3.3 Triangles et parallélisme

Proposition 16 – Théorème de Thalès

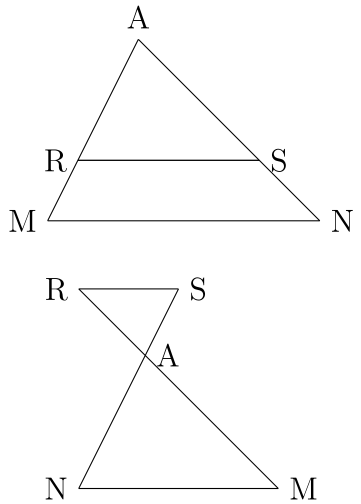
Si deux droites (MR) et (NS) se coupent en A telles que (RS)//(MN) alors :

$$\frac{AR}{AM} = \frac{AS}{AN} = \frac{RS}{MN}.$$

Proposition 17 – Réciproque de Thalès

Si les points A, R, M et A, S, N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AR}{AM} = \frac{AS}{AN}$, alors (RS)//(MN).

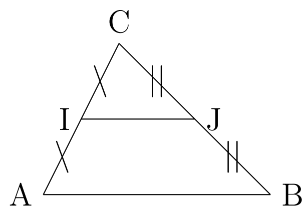
Deux configurations de Thalès



Proposition 18 – Corollaire 1 Théo. des milieux 1

Si ABC est un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] alors :

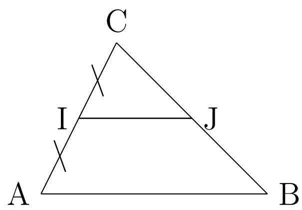
- (IJ)//(BC)
- $IJ = \frac{BC}{2}$



Démonstration.
Les points C, I et A sont alignés dans cet ordre ainsi que les points C, J et B.
De plus, $\frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$ et $\frac{CJ}{CB} = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\frac{CI}{CA} = \frac{CJ}{CB}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (IJ)//(BC) et que $\frac{IJ}{AB} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $IJ = \frac{BC}{2}$. □

Proposition 19 – Corollaire 2 Théorème des milieux 2

Si ABC est un triangle, I le milieu de [AB] et si J est un point de [BC] tel que (IJ)//(BC), alors J est le milieu de [BC].



(IJ)//(AB)

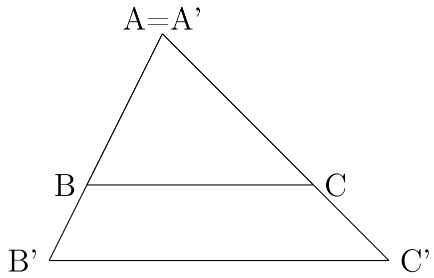
Démonstration.
On sait que (IJ)//(AB) et que les droites (AI) et (BJ) se coupent en C.
D'après le théorème de Thalès, on en déduit que : $\frac{CI}{CA} = \frac{CJ}{CB}$. Comme I est le milieu de [AB], on a $\frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$ et donc $\frac{CJ}{CB} = \frac{1}{2}$. Cela signifie exactement que J est le milieu de [BC].

□

3.4 Trigonométrie

Introduction de la notion de cosinus

On considère deux triangles ABC et A'B'C' qui sont rectangles respectivement en B et en B' et tels que $\widehat{\text{B'A'C'}} = \widehat{\text{BAC}}$. Quitte à effectuer un déplacement de ces triangles, on peut les disposer comme sur le dessin ci-dessous.



D'après le théorème de Thalès, on voit alors que $\dfrac{\text{AB}}{\text{AB'}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AC'}}$.

Par conséquent, AB × AC' = AB' × AC

Donc $\dfrac{\text{AB}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{AB'}}{\text{AC'}}$.

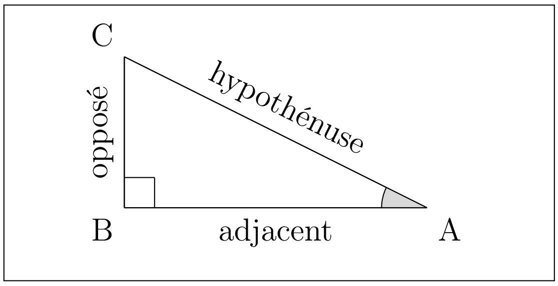
Finalement, cela signifie que la quantité $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypothénuse}}$ est la même pour les deux triangles. Par suite, cette quantité serait également la même pour tous les triangles rectangles ayant un angle égal à $\widehat{\text{BAC}}$.

On note $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$ cette quantité.

Définition 10

Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

- $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$
- $\sin\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AC}}$
- $\tan\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}}$



Remarque.
On pourra retenir que :

- $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$
- $\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$
- $\tan = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$

Proposition 20

Dans un triangle ABC rectangle en B :

$$\tan(\widehat{\mathrm{BAC}}) = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})}{\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})}.$$

Démonstration.
On considère un triangle ABC rectangle en B. On a alors :

$$\frac{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})}{\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})} = \frac{\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}}{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \tan(\widehat{\mathrm{BAC}})$$

□

Proposition 21

Dans un triangle ABC rectangle en B :

$$\left(\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})\right)^2 + \left(\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})\right)^2 = 1.$$

Remarque.
En général, on note $\sin^2(\widehat{\mathrm{BAC}}) + \cos^2(\widehat{\mathrm{BAC}}) = 1$.

Démonstration.
On considère un triangle ABC rectangle en B. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sin(\widehat{\mathrm{BAC}}))^2 + (\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}))^2 &= \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}^2} + \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} \\
&= \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} \\
&= \frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AC}^2} \quad \text{(car d'après Pythagore, } \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2\text{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

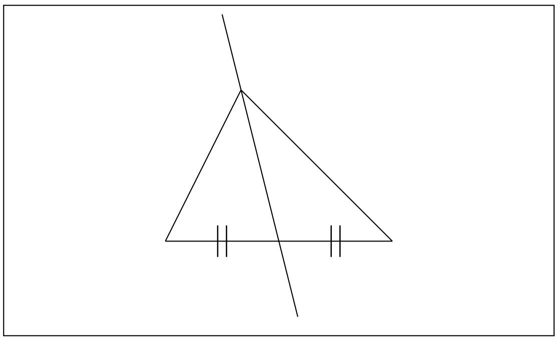
□

3.5 Droites remarquables dans un triangle

3.5.1 Médianes

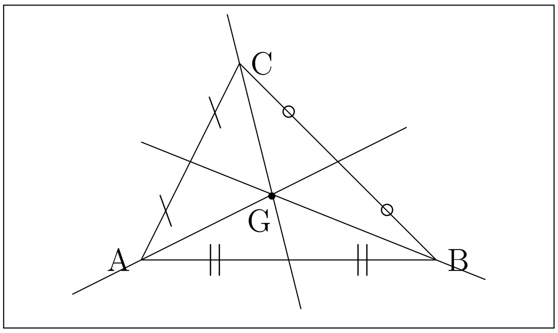
Définition 11

Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé.



Proposition 22

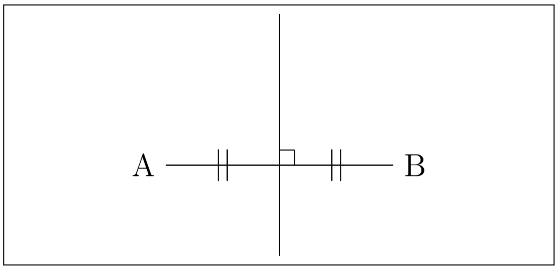
Les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité du triangle**.



3.5.2 Médiatrices

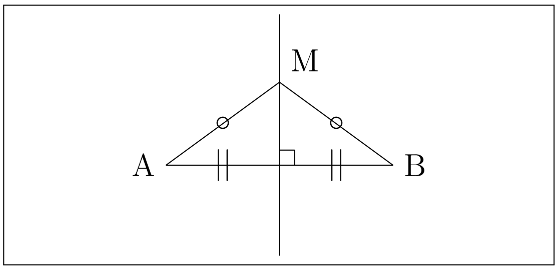
Définition 12

La médiatrice d'un segment [AB] est la droite qui passe par le milieu du segment [AB] et qui lui est perpendiculaire.



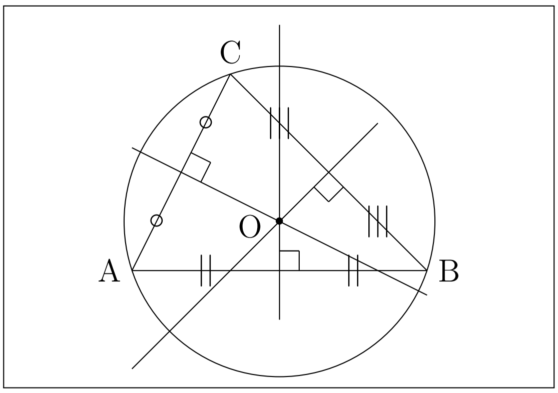
Proposition 23

Un point M appartient à la médiatrice du segment [AB] si, et seulement si, MA = MB.



Proposition 24

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle ABC sont concourantes en un point O. Ce point vérifie OA = OB = OC et est appelé **centre du cercle circonscrit au triangle**.

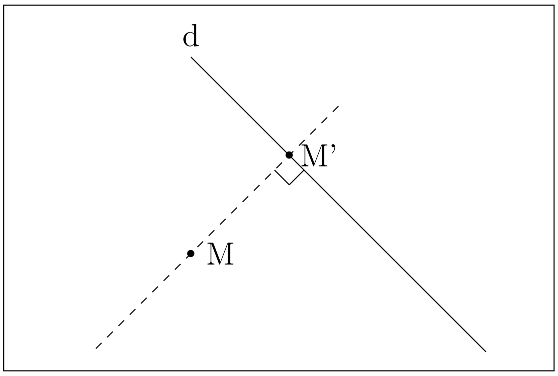


3.5.3 Hauteurs

Définition 13

Soient d une droite et M un point tel que M $\notin d$.

- Le **projeté orthogonal de M sur *d*** est le point M' tel que : M' $\in d$ et (MM') $\perp d$.
- La **distance du point M à la droite *d*** est la longueur MM'.



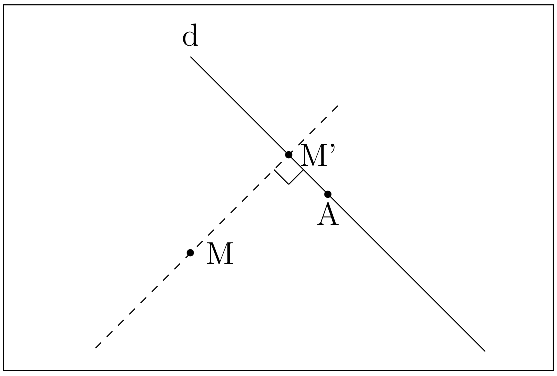
Proposition 25

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M.

Démonstration.
On note M' le projeté orthogonal de M sur d.
On considère alors un autre point A de la droite d.
Ainsi, le triangle AMM' test rectangle en M'.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

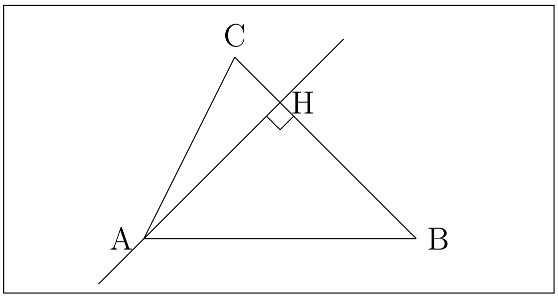
$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AM'}^2 + \mathrm{MM'}^2$$

Cela signifie donc que $\mathrm{AM}^2 \geqslant \mathrm{MM'}^2$ et par conséquent que AM $\geqslant$ MM'.
Finalement, on a montré que le point M' est le point de d qui est le plus proche de M (tous les autres points de d ont une distance à M supérieure). □



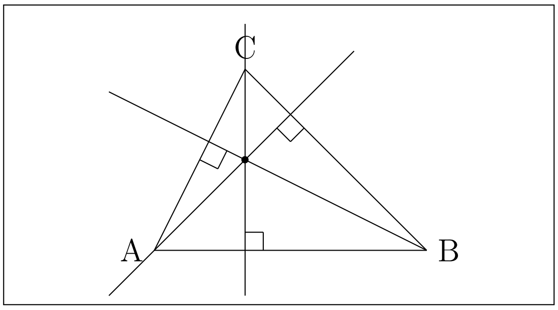
Définition 14

Dans un triangle ABC, la hauteur issue du sommet A est la droite passant par A et par le projeté orthogonal de A sur (BC) : il s'agit de la droite (AH).



Proposition 26

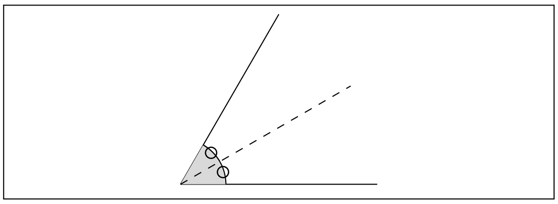
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre** du triangle.



3.5.4 Bissectrices

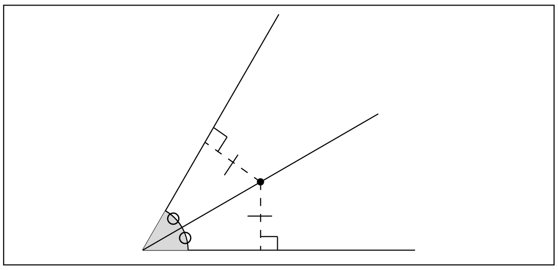
Définition 15

La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet qui partage l'angle en deux angles de même mesure.



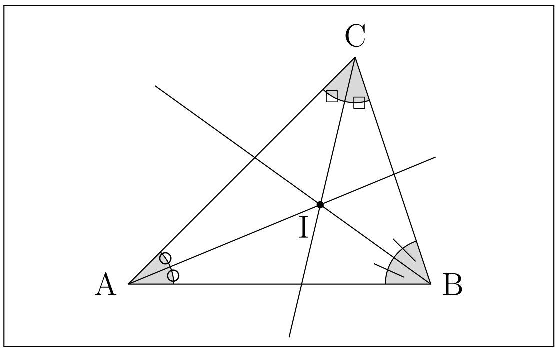
Proposition 27

Tout point de la bissectrice d'un angle est à égal distance des côtés de cet angle.



Proposition 28

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I.

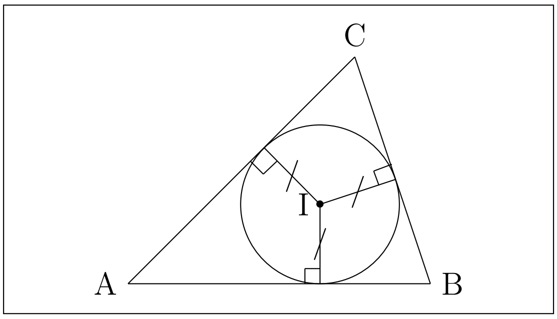


Définition 16

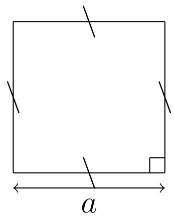
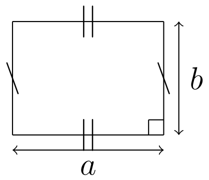
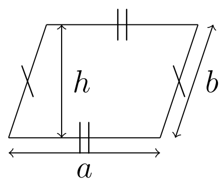
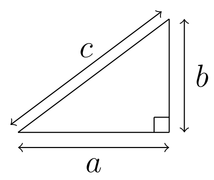
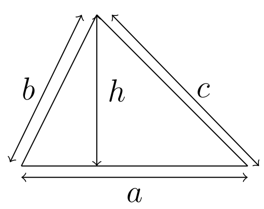
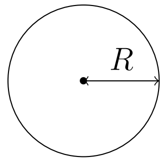
Le **cercle inscrit** à un triangle est le cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

Proposition 29

Le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices.



4 Formules des périmètres et des aires

	Figure	Périmètre	Aire
Carré		$\mathcal{P} = 4a$	$\mathcal{A} = a^2$
Rectangle		$\mathcal{P} = 2 \times (a+b)$ $= 2a + 2b$	$\mathcal{A} = a \times b$
Parallélogramme		$\mathcal{P} = 2 \times (L+l)$ $= 2L + 2l$	$\mathcal{A} = L \times h$
Triangle rectangle		$\mathcal{P} = a + b + c$	$\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2}$
Triangle quelconque		$\mathcal{P} = a + b + c$	$\mathcal{A} = \dfrac{a \times h}{2}$
Cercle-Disque		$\mathcal{P} = 2\pi R$	$\mathcal{A} = \pi R^2$

5 Formules des volumes

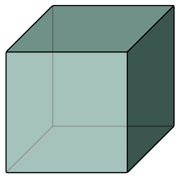
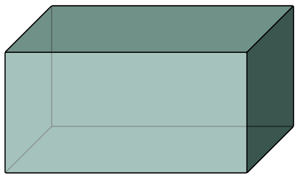
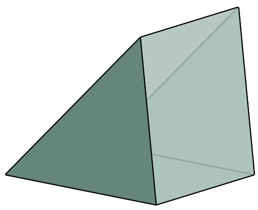
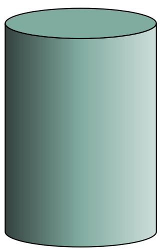
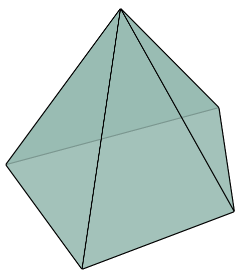
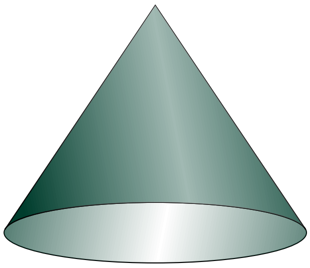
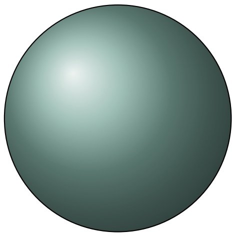
	Figure	Paramètres	Volume
Cube		côté : a	$\mathcal{V} = a^3$
Parallélépipède rectangle		Largeur : l Longueur : L Hauteur : h	$\mathcal{V} = l \times L \times h$
Prisme (deux polygones identiques reliés par des parallélogrammes)		Aire de la base : $\mathcal{A}_{\text{base}}$ Hauteur : h	$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$
Cylindre		Rayon de la base : R Hauteur : h	$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$ $= \pi R^2 \times h$
Pyramide		Aire de la base : $\mathcal{A}_{\text{base}}$ Hauteur : h	$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$

	Figure	Paramètres	Volume
Cône		Rayon de la base : R Hauteur : h	$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$
Sphère/Boule		Rayon : R	$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi R^3$

Savoir-faire du chapitre

- Résoudre des problèmes de géométrie sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des aires et des volumes.
- Calculer des angles et des longueurs à l'aide de la trigonométrie.
- Rédiger une démonstration de manière structurée.