**Lycée Lucie Aubrac - 2nde**

# Chapitre 11
# Fonctions de référence

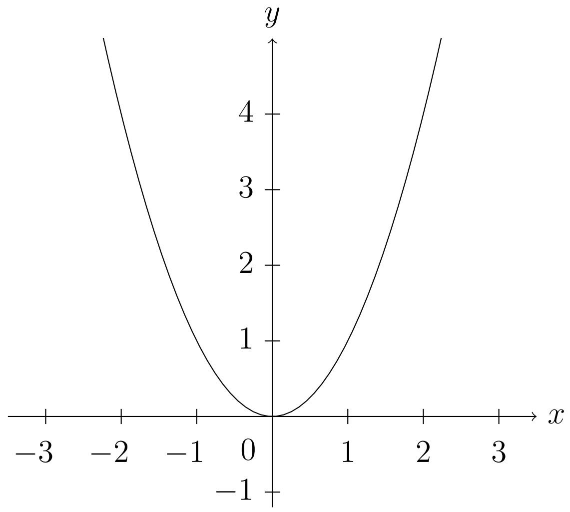
## Table des matières

# 1 Fonction carrée

**Définition 1**

La fonction carrée est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$




Fonction carrée

**Proposition 1**

La fonction carrée est paire.

*Démonstration.*

- L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. □

**Proposition 2**

La fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. Cela découle directement du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. □

**Proposition 3**

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

*Démonstration.*

- Montrons que $f$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Pour cela, on considère deux réels $a$ et $b$ appartenant à $[0;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \leqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \geqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(b) - f(a) & = & b^2 - a^2 \\ & = & (b-a)(b+a) \\ & \geqslant & 0 \quad \text{car} \quad b - a \geqslant 0 \;\; \text{et} \;\; b + a \geqslant 0 \end{array}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \leqslant f(b)$ et on a donc montré que $f$ est croissante sur $[0;+\infty[$
- Montrons maintenant que $f$ est décroissante sur $]-\infty;0]$.
  Pour cela, on considère deux réels $a$ et $b$ appartenant à $]-\infty;0]$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(b) - f(a) & = & b^2 - a^2 \\ & = & (b-a)(b+a) \\ & \leqslant & 0 \quad \text{car} \quad b - a \geqslant 0 \;\; \text{et} \;\; b + a \leqslant 0 \end{array}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \geqslant f(b)$ et on a donc montré que $f$ est décroissante $]-\infty;0]$.

□

## 2 Fonction inverse

**Définition 2**

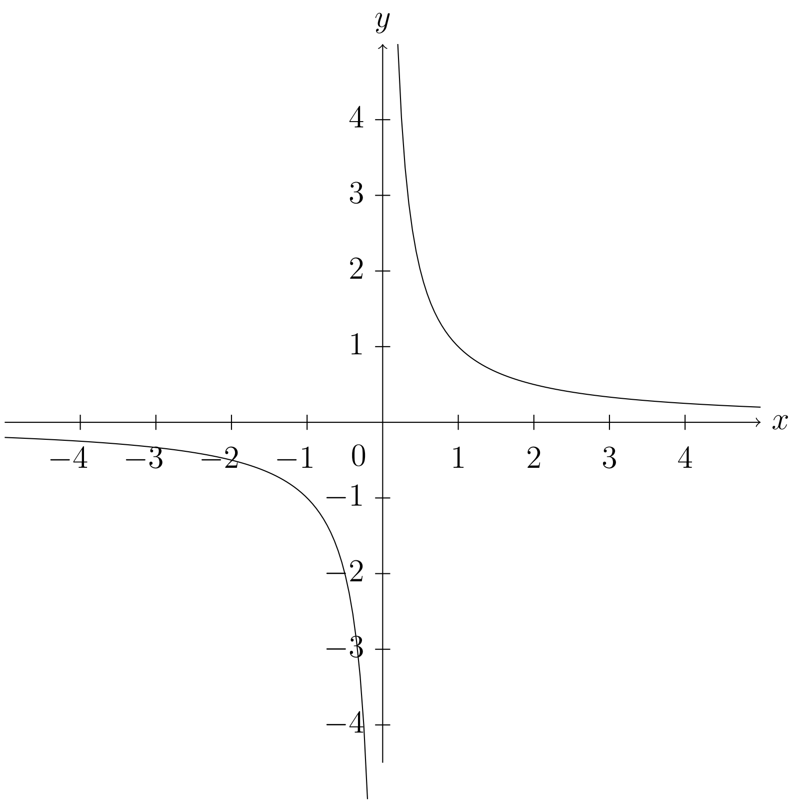
La fonction inverse est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

**Remarque.**
Le calcul d'image suivant justifie le nom de « fonction inverse » :
Pour tous entiers $a$ et $b$ non nuls,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Or, $\dfrac{b}{a}$ est bien l'inverse de $\dfrac{a}{b}$.




Fonction inverse

**Proposition 4**

La fonction inverse est impaire.

*Démonstration.*

- L'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

□

**Proposition 5**

La fonction inverse est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

*Démonstration.*
Il est immédiat de voir que si $x<0$ alors $\frac{1}{x}<0$ et que si $x>0$ alors $\frac{1}{x}>0$. □

**Proposition 6**

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x}$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

*Démonstration.*

- Montrons que $f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.
  Pour cela, on considère deux réels $a$ et $b$ appartenant à $]0;+\infty[$ et tels que $a\leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a)\geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b)-f(a)\leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= \frac{1}{b}-\frac{1}{a} \\ &= \frac{a-b}{ab} \\ &\leqslant 0 \quad \text{car} \quad a-b\leqslant 0 \quad \text{et} \quad ab\geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a)\geqslant f(b)$ et on a donc montré que $f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$
- Montrons maintenant que $f$ est décroissante sur $]-\infty;0[$.
  Pour cela, on considère deux réels $a$ et $b$ appartenant à $]-\infty;0[$ et tels que $a\leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a)\geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b)-f(a)\leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= \frac{1}{b}-\frac{1}{a} \\ &= \frac{a-b}{ab} \\ &\leqslant 0 \quad \text{car} \quad a-b\leqslant 0 \quad \text{et} \quad ab\geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a)\geqslant f(b)$ et on a donc montré que $f$ est décroissante $]-\infty;0[$.

□

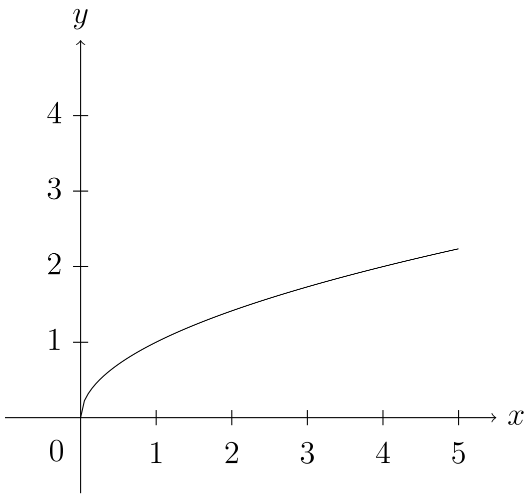
**Remarque.**
Il serait FAUX de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ !
Par exemple, avec $a=-1$ et $b=1$, on voit que $a\leqslant b$ et que $f(a)\leqslant f(b)$.

# 3 Fonction racine carrée

**Définition 3**

La fonction racine carrée est définie comme étant la fonction

$$f : \begin{cases} [0\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$




Fonction racine carrée

**Rappel.**
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$,
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**Proposition 7**

La fonction racine carrée est positive sur $[0\,;+\infty[$.

*Démonstration.*
Le nombre réel $\sqrt{x}$ est défini comme étant l'unique nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.
Ainsi, par définition, $\sqrt{x} \geqslant 0$. □

**Proposition 8**

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0$ ↗ | |

*Démonstration.*
Montrons que $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Pour cela, on considère deux réels $a$ et $b$ appartenant à $[0\,;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.

On veut montrer qu'alors $f(a) \leqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \geqslant 0$.
En fait, on a :

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= \sqrt{b} - \sqrt{a} \\
&= (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \geqslant 0 \quad \text{car} \quad b - a \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $f(a) \leqslant f(b)$ et on a donc montré que $f$ est croissante sur $[0\,; +\infty[$

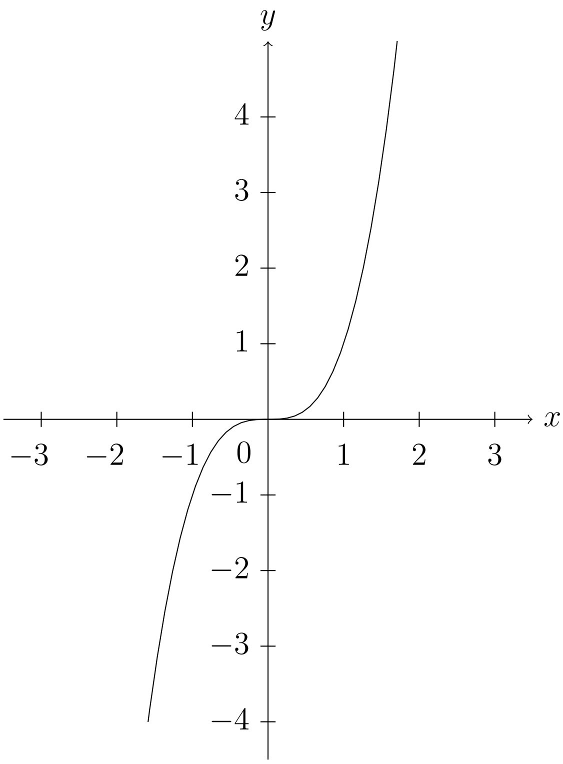
□

# 4 Fonction cube

**Définition 4**

La fonction cube est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$




Fonction cube

**Proposition 9**

La fonction cube est impaire.

*Démonstration.*

- L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

□

**Proposition 10**

La fonction cube est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$.

*Démonstration.*
Pour tout $x \leqslant 0$, $x^3 \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 0$. Cela découle directement de la règle des signes. □

**Proposition 11**

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $x^3$ | $\nearrow$ | |

*Démonstration.*
La preuve est similaire à la preuve des variations de la fonction carrée en utilisant l'identité remarquable suivante :

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2).$$

□

# 5 Inégalités et fonctions de référence

## 5.1 Comparaison des fonctions de référence

**Proposition 12**

- Pour tout $x \in [0\,;1]$,
$$x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$$
- Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$,
$$\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3$$
- Pour $x = 0$ et pour $x = 1$,
$$\sqrt{x} = x = x^2 = x^3$$

*Démonstration.*

- Soit $x \in [0;1]$ :
  1. $x^3 \leqslant x^2 \iff x^3 - x^2 \leqslant 0 \iff x^2(x-1) \leqslant 0$.
     La dernière inégalité est vraie car $x^2 \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$. Ainsi, par équivalence, on voit que la première inégalité est également vraie.
  2. $x^2 \leqslant x \iff x^2 - x \leqslant 0 \iff x(x-1) \leqslant 0$.
     La dernière inégalité est vraie car $x \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$. Ainsi, par équivalence, on voit que la première inégalité est également vraie.
  3. On a montré que $x^2 \leqslant x$. Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;1]$. Ainsi, on voit que $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x}$ donc que $x \leqslant \sqrt{x}$.
- Soit $x \in [1\,;+\infty[$ :
  1. $x^2 \leqslant x^3 \iff x^2 - x^3 \leqslant 0 \iff x^2(x-1) \leqslant 0$.
     La dernière inégalité est vraie car $x^2 \geqslant 0$ et $x - 1 \geqslant 0$. Ainsi, par équivalence, on voit que la première inégalité est également vraie.
  2. $x \leqslant x^2 \iff x - x^2 \leqslant 0 \iff x(1-x) \leqslant 0$.
     La dernière inégalité est vraie car $x \geqslant 0$ et $1 - x \leqslant 0$. Ainsi, par équivalence, on voit que la première inégalité est également vraie.
  3. On a montré que $x \leqslant x^2$. Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi, on voit que $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2}$ donc que $\sqrt{x} \leqslant x$.

□

## 5.2 Encadrements

**Méthode – Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $a \leqslant x \leqslant b$.**

- **Méthode 1 :** On part de l'inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ et on construit étape par étape une inégalité sur $f(x)$.
- **Méthode 2 :** On dresse le tableau de variations de $f$ sur $[a;b]$ puis on cherche le minimum et le maximum de $f$ sur cet intervalle.

**Remarque.**
Il est important de connaître ces deux méthodes car il n'est pas toujours possible d'appliquer les deux.

**Exemple.**

- **Utilisation de la première méthode :**
  Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 1$.
  Si $1 \leqslant x \leqslant 3$, déterminer un encadrement de $f(x)$.

  Solution :
  Soit $1 \leqslant x \leqslant 3$.
  Donc $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$ car la fonction carrée est croissante sur $[1\,;3]$
  Donc $-27 \leqslant -5x^2 \leqslant -3$ car $-3 < 0$
  Donc $-28 \leqslant -5x^2 - 1 \leqslant -4$
  Donc $-28 \leqslant f(x) \leqslant -4$.

- **Utilisation de la deuxième méthode :**
  Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
  Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, déterminer un encadrement de $f(x)$.

  Solution :
  Le tableau de variation de la fonction carrée sur $[-2\,;3]$ est :

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $9$ |

  Finalement, si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ , on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 9.$$

**Remarque.**
Attention, le raisonnement suivant est faux :

$$\text{Erreur !!!} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3, \\ \text{donc } f(-2) \leqslant f(x) \leqslant f(3) \\ \text{donc } 4 \leqslant f(x) \leqslant 9 \end{cases}$$

Pourtant, $f(0) = 0$ n'est pas compris entre 4 et 9. L'erreur vient du fait que $f$ n'est pas croissante sur $[-2\,;3]$. Elle ne conserve donc pas le sens des inégalités.

**Savoir-faire du chapitre**

- Connaître les courbes des fonctions de référence.
- Faire le lien entre les courbes et les propriétés des fonctions de référence.
- Connaître et utiliser la position relative de leur courbe.
- Déterminer des encadrements.