Lycée Lucie Aubrac - 2nde

Chapitre 10
Fonctions paires et impaires

Définition 1

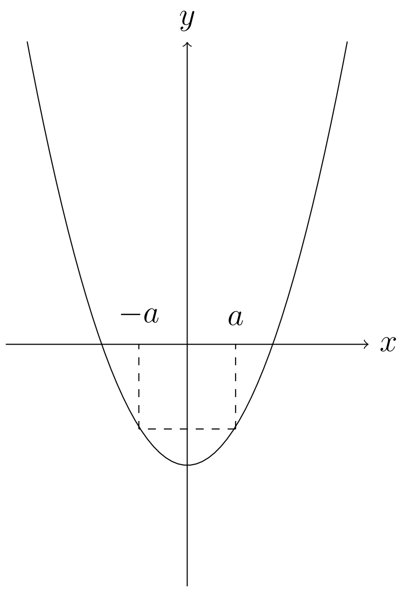
Un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ est centré en 0 signifie que si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$

Définition 2

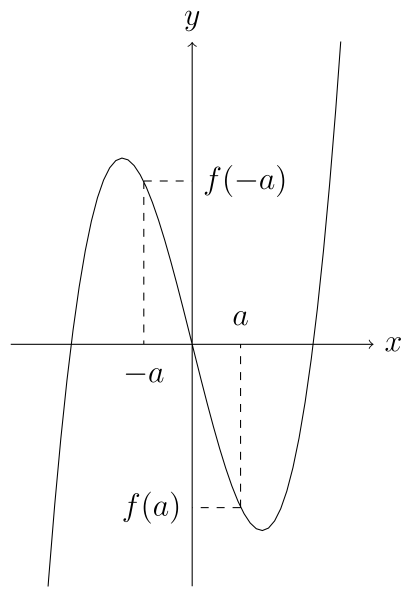
- Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **paire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
$$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ est centré en } 0 \\ \text{Pour tout } x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$
- Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **impaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
$$\begin{cases} \mathcal{D} \text{ est centré en } 0 \\ \text{Pour tout } x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Proposition 1

- f est paire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport l'origine du repère.



Fonction paire



Fonction impaire

Proposition 2

Si f est une fonction impaire, alors $f(0) = 0$.

Démonstration.
On sait que pour tout x, $f(-x) = -f(x)$.
En particulier, pour $x = 0$, on a : $f(0) = -f(0)$.
On en déduit que $2f(0) = 0$ et donc que $f(0) = 0$. $\square$

Méthode – Étudier la parité d'une fonction

1. On vérifie que l'ensemble de définition est centré en 0.
2. On calcule $f(-x)$ d'une part et $f(x)$ d'autre part et on compare les résultats obtenus.

Exemple.
Étudier la parité de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = x^2 + 2$.

Solution :

- L'ensemble de définition $[-1\,;1]$ est centré en 0 car si $x \in [-1\,;1]$, alors $-x \in [-1\,;1]$.
- Soit $x \in [-1\,;1]$.
  D'une part, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2$.
  D'autre part, $f(x) = x^2 + 2$.
  Ainsi, $f(x) = f(-x)$ et la fonction f est donc paire.

Remarque.
Attention ! Les fonctions paires et impaires sont des cas particuliers. La plupart des fonctions en mathématiques ne sont ni paires, ni impaires.

Exercice
Pour chaque fonction, dire si elle est « paire », « impaire » ou « ni paire, ni impaire ».

(a) $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$

(b) $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3+x \end{array} \right.$

(c) $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-5;5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-1 \end{array} \right.$

(d) $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-2;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$

(e) $f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-3)x^7 \end{array} \right.$

(f) $f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-2;-1[\,\cup\,]1;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{x^2-2} \end{array} \right.$

Savoir-faire du chapitre

- Faire le lien entre la définition d'une fonction paire ou impaires et les symétries.
- Étudier la parité d'une fonction.