Lycée Lucie Aubrac - 2$^{\text{nde}}$

Calculs et automatismes

Table des matières

Première partie
Calcul numérique

1 Nombres entiers relatifs

Définition 1

Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif.

Exemples. Les nombres -5 ; 6 ; 0 ; -17 et 33 sont des nombres relatifs.

Proposition 1

Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :
- On additionne les deux parties numériques sans se soucier des signes
- On met au résultat le signe commun aux deux nombres

Exemples. $3 + 7 = 10$ et $(-5) + (-3) = -8$

Proposition 2

Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :
- On calcul la différence entre les deux nombres sans se soucier des signes
- On met au résultat le signe du nombre ayant la plus grande partie numérique

Exemples. $3 + (-7) = -4$ et $(-5) + 11 = 6$

Proposition 3

Soustraire un nombre relatif, c'est lui ajouter son opposé.

Exemples. $(-2) - 3 = (-2) + (-3) = -5$ et $(-3) - (-5) = (-3) + 5 = 2$

Proposition 4

Le produit ou le quotient de deux nombres relatifs est :
- positif si les deux nombres sont de même signe ;
- négatif si les deux nombres sont de signes contraires.

Exemples. $(-3) \times 2 = -6$ et $(-5) \times (-7) = 35$

Exercice 1. Calculer les expressions suivantes :

a) $-2+3-7$
b) $(-3)+(-15)$
c) $(-15)+18$
d) $7+(-11)$
e) $-2-(-5)$
f) $-3-(-6)+7$

Exercice 2. Calculer les expressions suivantes :

a) $(-4+5)-(-5+8)$
b) $(-5-9-4)-(-4)$
c) $-5+2+(-1)-9$
d) $-2+(9-(-5)+3)$
e) $-3-(-6+3)$
f) $-1+(-1-3)$

QCM d'entrainement Nombres relatifs

2 Fractions

Proposition 5

Pour additionner ou soustraire des fractions :
- Étape 1 : Réduire au même dénominateur ;
- Étape 2 : Additioner ou soustraire les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

Exemple. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.

Proposition 6

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1\times 1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$

QCM d'entrainement Fractions

Proposition 7

Il est impossible de diviser par zéro.
Le dénominateur d'une fraction est donc nécessairement différent de zéro.

Démonstration.
On va par exemple montrer que $\dfrac{1}{0}$ n'a pas de sens.
Effectuer une division revient en fait à résoudre une « multiplication à trou ».
Ainsi, $\dfrac{1}{0}$ est le résultat de la multiplication à trou suivante : $0 \times \ldots = 1$.
Cela est effectivement impossible. $\square$

Proposition 8

Diviser par une fraction (différente de zéro) revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemples. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{1} = \dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{\frac{7}{5}}{2} = \dfrac{7}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10}$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes au maximum :

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{15}$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{-2}{9} - \dfrac{-8}{15}$

d) $\dfrac{2}{11} + 2$

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes au maximum :

a) $\dfrac{7}{4} \div 2$

b) $\dfrac{-2}{9} \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{-8}{3} \times \dfrac{5}{4}$

c) $\dfrac{7}{12} \div \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}\right)$

d) $\dfrac{7}{12} - \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{2}{3} \times 2 + \dfrac{3}{4}$

f) $\dfrac{2}{3} \times \left(2 + \dfrac{3}{4}\right)$

Exercice 5. Dans chaque cas, dire si le nombre de chiffres après la virgule de la quantité considérée est finie ou non. Donner ensuite une valeur décimale des quantités suivantes (lorsque cette valeur n'est pas exacte, arrondir à $0,01$ près).

a) $1+\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

e) $\frac{3}{8}$

f) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$

Exercice 6. Déterminer l'écriture simplifiée de l'expression :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

Exercice 7. Montrer que pour tout entier positif non nul n, on a :

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

3 Puissances

Définition 2

- Pour tout nombre a et tout entier strictement positif n :
$$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\ facteurs}.$$
- Pour tout nombre a et tout entier strictement positif n :
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
- Pour tout nombre a non nul :
$$a^0=1.$$

Exemples. $3^3=3\times3\times3=27$ et $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2\times2\times2\times2}=\frac{1}{16}$

Proposition 9

Pour tous entiers relatifs m et n et pour tout nombre a différent de zéro :
- $a^m\times a^n=a^{m+n}$
- $(a^m)^n=a^{mn}$
- $(a\times b)^m=a^m\times b^m$
- $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

Exemples.

1. $2^3\times2^2=2^5$
2. $\left(3^2\right)^5=3^{15}$

3. $(4 \times 3)^5 = 4^5 \times 3^5$
4. $\dfrac{5^6}{5^4} = 5^2$

Exercice 8. Effectuer les calculs suivants :

a) $1 + 3^2$

b) 2×5^3

c) $(2 \times 5)^3$

d) $2^{-1} + 5^{-2}$

Exercice 9. Pour chaque affirmation, justifier si elle est vraie ou fausse.

a) $2^{-3} \leqslant 0$

b) $(-2)^{-3} \leqslant 0$

c) $(-3)^{-2} \leqslant 0$

d) $-2^2 \leqslant 0$

Exercice 10. Écrire les nombres suivants en écriture décimale.

a) 10^2

b) 10^{-4}

c) 14×10^{-1}

d) $0{,}12 \times 10^3$

e) $0{,}02 \times 10^{-2}$

f) $0{,}13 \times 10^4$

Exercice 11. Écrire les nombres suivants en écriture scientifique, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^k$ avec $1 \leqslant a < 10$.

a) 135

b) $0{,}754$

c) 115358

d) $\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{1}{8}$

f) $0{,}0045$

QCM d'entrainement Puissances

4 Racines carrées

Définition 3

Si a est un nombre positif, la racine carrée de x est l'unique nombre positif dont le carré est égal à x. Ce nombre se note $\sqrt{x}$
Ainsi, on a : pour tout $x \geqslant 0$,

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

Proposition 10

Soient x et y deux nombres strictement positifs. On a alors :

1. $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
2. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
3. $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Exemples.

1. $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$
2. $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$
3. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Proposition 11

Soit x un nombre quelconque (positif ou négatif). On a alors :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemples.

- Si $x = 3$, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$
- Si $x = -3$, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Exercice 12. Effectuer les calculs suivants :

a) $\sqrt{4}$ **c)** $(\sqrt{11})^2$
b) $\sqrt{(-6)^2}$ **d)** $\sqrt{5^4}$

Exercice 13. Déterminer, si elle existe, la racine carrée des nombres suivants.

a) 121 **c)** $\sqrt{121}$
b) -16 **d)** $(-2)^2$

Exercice 14. Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ avec $a > 0$.

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{6}$

b) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $3\sqrt{2}$

f) $5\sqrt{7}$

Exercice 15. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$ tels que b soit le plus petit possible.

a) $\sqrt{45}$

b) $\sqrt{50}$

c) $\sqrt{8}$

d) $\sqrt{24}$

e) $\sqrt{243}$

f) $\sqrt{242}$

g) $\sqrt{48}$

h) $2\sqrt{21}$

QCM d'entrainement Racines carrées

Deuxième partie
Équations et inéquations de degré un

5 Premiers éléments de calcul littéral

Définition 4

Une **expression littérale** désigne une expression mathématique dans laquelle apparaît des lettres. Ces lettres désignent des nombres dont on ne connaît pas la valeur. Elles sont appelées les **variables**.

Remarque. Par convention, on s'autorise à ne pas noter le signe $\times$ entre un nombre et une lettre. Par exemple, on note $2 \times x = 2x$.
De plus, on ne note pas le nombre 1 lorsqu'il est multiplié par une lettre. Ainsi, $1x = x$.

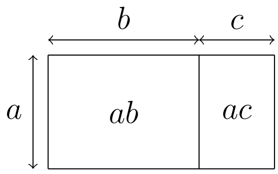
Proposition 12

Comme les lettres représentent des nombres, toutes les règles du calcul numérique (règle des signes, fractions, puissances, racines) s'appliquent également aux variables.

Proposition 13 – Distributivité simple

Pour tous nombres a, b et c : $a(b+c) = ab + ac$

Démonstration. On considère les rectangles ci-dessous :



L'aire du grand rectangle est $a(b+c)$ alors que les aires des deux petits rectangles sont ab et ac. Cela prouve bien que $a(b+c) = ab + ac$. □

Exemple. $2(x+5) = 2 \times x + 2 \times 5 = 2x + 10$.

Proposition 14

- Lorsqu'une parenthèse est précédée d'un signe $+$, on utilise la distributivité en distribuant le facteur $+1$.
- Lorsqu'une parenthèse est précédée d'un signe $-$, on utilise la distributivité en distribuant le facteur -1.

Exemples.

1. $x + (3+x) = x + 1 \times 3 + 1 \times x = x + 3 + x = 2x + 3$
2. $2x - (5+x) = 2x + (-1) \times 5 + (-1)x = 2x - 5 - x = x - 5$

Exercice 16. Expliquer pourquoi l'on ne peut pas simplifier la somme de deux termes de la forme x^n et x^m lorsque $n \neq m$ mais que l'on peut le faire lorsque $n = m$ (par exemple on ne peut pas simplifier $2x^2 + 3x$ mais on peut simplifier $2x + 3x$).

Exercice 17. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $5x + 7x$

b) $x - 3x$

c) $3x \times (-2)$

d) $-5x \times 3 + 1$

e) $x^2 + 3x + x^2$

f) $6x - 3x^2 + x - 5x^2$

g) $1 + 2x^2 \times 3$

h) $2x - 1 + x^2 - 7$

Exercice 18. Développer et simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $3(x + 2)$

b) $-(7 + 5x^2)$

c) $-(3 - x)$

d) $(x + x^2) - (3x - x^2)$

e) $-7(x + 1) + 3(2x + 1)$

f) $-x(-2x - 1) - (x - 1)$

g) $(x - 3) \times x$

h) $-x^3(x^2 + x^4)$

Exercice 19. Sans calculatrice, développer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1}{2}(2x + 3)$

b) $\dfrac{7}{3}(-15x + 3)$

c) $\dfrac{10}{7}(7x^2 + 28x - 10)$

d) $-\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}\right)$

e) $\dfrac{-(2x + 4)}{2}$

f) $\dfrac{4(10x + 15x^2)}{5}$

Exercice 20. Sans calculatrice, développer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $x^2(x + 6)$

b) $7(3x + 2)$

c) $x(-x + 4)$

d) $-3(-2x - 1)$

QCM d'entrainement Simplifications d'expressions

6 Résolution d'équations de degré un

Définition 5

- Une **équation d'inconnue x** est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
- **Résoudre une équation**, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.

Pour résoudre une équation, on utilise la propriété suivante :

Proposition 15

Soient a, b et c trois nombres réels (avec $c \neq 0$). Alors,

$$a = b \iff a + c = b + c \qquad \text{et} \qquad a = b \iff a \times c = b \times c$$

Méthode – Résoudre une équation de degré un

Isoler l'inconnue d'un côté de l'égalité en effectuant les mêmes opérations de chaque côté.

Exemple.

1. Résoudre l'équation $5x + 3 = 3x - 7$.

Solution :

$$\begin{array}{lrcll}
 & 5x+3 & = & 3x-7 & \\
-3x & 5x+3-3x & = & 3x-7-3x & -3x \\
 & 2x+3 & = & -7 & \\
-3 & 2x+3-3 & = & -7-3 & -3 \\
 & 2x & = & -10 & \\
\div 2 & x & = & \dfrac{-10}{2} & \div 2 \\
 & x & = & -5 &
\end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-5\}$

2. Résoudre l'équation $\dfrac{x}{2}+1=2x-1$.

- **Méthode 1**

$$
\begin{array}{clcll}
 & \dfrac{x}{2}+1 & = & 2x-1 & \\
+1 & & & & +1 \\
 & \dfrac{x}{2}+1+1 & = & 2x-1+1 & \\
 & \dfrac{x}{2}+2 & = & 2x & \\
-\dfrac{x}{2} & & & & -\dfrac{x}{2} \\
 & \dfrac{x}{2}+2-\dfrac{x}{2} & = & 2x-\dfrac{x}{2} & \\
 & 2 & = & \left(2-\dfrac{1}{2}\right)x & \\
 & 2 & = & \dfrac{3}{2}x & \\
\div\dfrac{3}{2} & & & & \div\dfrac{3}{2} \\
 & \dfrac{2}{\frac{3}{2}} & = & x & \\
 & 2\times\dfrac{2}{3} & = & x & \\
 & \dfrac{4}{3} & = & x &
\end{array}
$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

- **Méthode 2**

$$
\begin{array}{clcll}
 & \dfrac{x}{2}+1 & = & 2x-1 & \\
\times 2 & & & & \times 2 \\
 & 2\left(\dfrac{x}{2}+1\right) & = & 2\,(2x-1) & \\
 & 2\times\dfrac{x}{2}+2 & = & 4x-2 & \\
 & x+2 & = & 4x-2 & \\
+2 & & & & +2 \\
 & x+2+2 & = & 4x-2+2 & \\
 & x+4 & = & 4x & \\
-x & & & & -x \\
 & x+4-x & = & 4x-x & \\
 & 4 & = & 3x & \\
\div 3 & & & & \div 3 \\
 & \dfrac{4}{3} & = & x &
\end{array}
$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

Remarque. Attention ! Pour résoudre une équation, on effectue les mêmes opérations de chaque côté de l'égalité en respectant bien les priorités d'opérations.

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 7 = 1$
2. $-2x - 5 = 3x + 2$
3. $-x + 8 = x$
4. $7x + 1 = 0$
5. $-3x = -3$
6. $-2x = \sqrt{2}$

Exercice 22.
Résoudre les équations suivantes :

1. $7(x + 1) = 5x$
2. $-5(-x + 1) = 2x$
3. $\dfrac{x}{2} + 3 = 4x - 5$
4. $\dfrac{x}{3} + 3 = x + 5$
5. $\dfrac{3x}{7} + 3x = 4 - x$
6. $1 - \dfrac{2x}{3} = 3$
7. $1 = \dfrac{7x}{3} + 1$
8. $\dfrac{2x - 3}{4} = \dfrac{x + 5}{3}$

QCM d'entrainement Résolution d'équations de degré un

7 Résolution d'inéquations de degré un

Pour résoudre une inéquation, on utilise les propriétés suivantes :

Proposition 16

Soient a, b et c trois nombres réels.

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a + c \leqslant b + c$$

Proposition 17

Soient a, b et c trois nombres réels.
- Si $c > 0$: $a \leqslant b \Longleftrightarrow a \times c \leqslant b \times c$
- Si $c < 0$: $a \leqslant b \Longleftrightarrow a \times c \geqslant b \times c$

Exemple.
On a $2 \leqslant 3$.
Si on multiplie cette inégalité par (-2), on voit que :

$$-2 \times 2 \geqslant -2 \times 3$$

Autrement dit, l'inégalité a changé de sens car -2 est négatif.

Méthode – Résoudre une inéquation de degré un

1. On procède comme pour les équations.
2. On fait attention au sens des inégalités : il change lorsqu'on multiplie ou on divise par un nombre négatif.

Exemple.
Résoudre l'inéquation $3x+3 \leqslant 5x-7$.

Solution :

$$\begin{array}{lrcll}
 & 3x+3 & \leqslant & 5x-7 & \\
-5x & & & & -5x \\
 & 3x+3-5x & \leqslant & 5x-7-5x & \\
 & -2x+3 & \leqslant & -7 & \\
-3 & & & & -3 \\
 & -2x+3-3 & \leqslant & -7-3 & \\
 & -2x & \leqslant & -10 & \\
\div(-2) & & & & \div(-2) \\
 & x & \geqslant & \dfrac{-10}{-2} & \\
 & x & \geqslant & 5 &
\end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = [5\,;+\infty[$

Exercice 23. Résoudre les inéquations :

1. $x+7<1$
2. $-2x-5 \leqslant 3x+2$
3. $-x+8 \geqslant x$
4. $7x+1 \geqslant 0$
5. $-2x < \sqrt{2}$

QCM d'entrainement Inéquations

Exercice 24. Résoudre les inéquations :

1. $7(x+1) \geqslant 5x$
2. $-5(-x+1) < 2x$
3. $\dfrac{x}{2}+3 < 4x-5$
4. $\dfrac{x}{3}+3 < x+5$
5. $\dfrac{3x}{7}+3x \leqslant 4-x$
6. $1-\dfrac{2x}{3} > 3$
7. $\dfrac{2x-3}{4} \leqslant \dfrac{x+5}{3}$

Troisième partie
Calcul littéral

8 Forme factorisée et forme développée

Définition 6

Distinguer la forme développée et la forme factorisée d'une expression algébrique revient à se poser la question : quelle est la dernière opération effectuée ?

- Dans la **forme développée**, la dernière opération effectuée est une addition ou une soustraction.
- Dans la **forme factorisée**, la dernière opération effectuée est une multiplication ou une division.

Exemples.
$x^3 + 3x^2$ est une forme développée.
$x(x+1)$ est une forme factorisée.

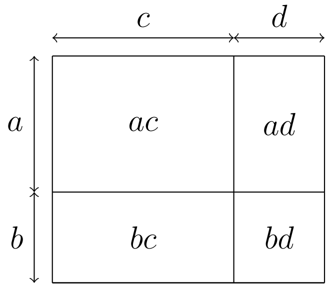
Exercice 25. Déterminer parmi les expressions suivantes, celles qui sont développées et celles qui sont factorisées.
$A(x) = x^2 + 3x$
$B(x) = x(x-3)$
$C(x) = (x+1)^2$
$D(x) = x^2 - 2x + 1$
$E(x) = x^2 - 3x$
$F(x) = (x-4)^2$

9 Développement d'une expression algébrique

Proposition 18 – Distributivité

Pour tous réels a, b, c et d :
- $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Démonstration.
- Le premier point a été démontré page 10.
- Pour prouver la deuxième égalité, on considère la figure suivante :



L'aire du grand rectangle est $(a+b)(c+d)$ alors que l'aire des quatre petits rectangles sont ac, ad, bc et bd. Là aussi, cela prouve bien que $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ □

Exemples.

1. $x(x+2) = x^2 + 2x$
2. $(2x+1)(x-2) = 2x \times x + 2x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) = 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$

Exercice 26. Développer et réduire les expressions suivantes :
$A(x) = (x+1)(x-3)$

$B(x) = (x-5)(7-x)$

$C(x) = (-x-5)(x+1)$

$D(x) = (3+x^2)(x+x^2)$

$E(x) = (-3-x^2)(-x-1)$

$F(x) = 3(x-1)(x+2)$

$G(x) = -(2+x)(x^2+1)$

$H(x) = -2(7+x)(x^2-1)$

10 Factorisation d'une expression algébrique

Méthode – Factoriser une expression algébrique :

1. Identifier un facteur commun
2. Mettre le facteur commun devant la parenthèse
3. Compléter l'expression à l'intérieur de la parenthèse

Remarque. Il est préférable de toujours vérifier la factorisation en redéveloppant le résultat obtenu et vérifier que l'on retrouve bien le résultat initial.

Exemples.

1. $3x + 3y = 3(x+y)$
2. $5x + 5 = 5(x+1)$
3. $x^2 + 3x = x(x+3)$

Exercice 27. Factoriser au maximum les expressions algébriques suivantes :

$A(x) = 3x + 3$

$B(x) = 2x - 2$

$C(x) = 4x - 2$

$D(x) = x^2 + 3x$

$E(x) = x^2 - x$

$F(x) = 7x + 7x^2$

$G(x) = x - 5x^3$

Exercice 28. Factoriser au maximum les expressions algébriques suivantes :

$A(x) = 7x^2 - 5x^3$

$B(x) = 4x^3 + 4$

$C(x) = 4x^3 + 2x$

$D(x) = x^5 - x$

$E(x) = x^3 + x^2 + x$

$F(x) = 7 + 7x^2 + 7x^5$

$G(x) = -3x^7 + x^5 - 6x^2$

QCM d'entrainement Développement et factorisation

11 Montrer que deux expressions algébriques sont égales

Méthode – Montrer l'égalité de deux expressions :

- Pour montrer que deux expressions A et B sont égales, on peut développer A et B et vérifier que les deux formes obtenues sont égales.
- Pour montrer que deux expressions A et B ne sont pas égales pour tout x, il suffit de trouver un nombre x particulier pour lequel l'égalité n'est pas vérifiée.

Exemple.
$A(x) = 2(x^2 - 3x)$ et $B(x) = x(2x - 6)$.
Montrer que pour tout nombre x, $A(x) = B(x)$.

On développe les expressions $A(x)$ et $B(x)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x^2 - 3x) \\ &= 2x^2 - 2 \times 3x \\ &= 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x(2x - 6) \\ &= x \times 2x - 6x \\ &= 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tout x, $A(x) = B(x)$.

Exercice 29. Pour chacune des expressions A et B, est-il vrai que, pour tout nombre x, $A(x) = B(x)$?

1. $A(x) = (x - 1)(x + 2)$ et $B(x) = x^2 + x - 2$
2. $A(x) = -x^2(-x + 1)$ et $B(x) = x(x^2 - x)$
3. $A(x) = -(x + 1)(x + 2)$ et $B(x) = -x^2 + 3x + 2$
4. $A(x) = x(x + 4) - 2$ et $B(x) = -2(1 + 2x) + x^2$
5. $A(x) = x(x + 4) + 2x$ et $B(x) = -x(-x - 6)$

Quatrième partie
Calcul littéral et identités remarquables

12 Identités remarquables

Proposition 19 – Identités remarquables

Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration.
Dans chaque cas, on utilise la double distributivité pour démontrer l'égalité souhaitée.

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ba + (-b)^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

Exemples. Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $(x+3)^2$
2. $(3x-4)^2$
3. $(2x+1)(2x-1)$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2\times x \times 3 + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(3x-4)^2 &= (3x)^2 - 2\times 3x \times 4 + 4^2\\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

3.

$$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

Exercice 30. Développer et simplifier les expressions suivantes.

$A(x) = (x+5)^2$

$B(x) = (x+1)^2$

$C(x) = (x-2)^2$

$D(x) = (x-1)(x+1)$

$E(x) = (x-4)(x+4)$

$F(x) = (2x-1)^2$

$G(x) = (4x+5)^2$

$H(x) = (3x-2)(3x+2)$

Exercice 31. Écrire l'expression sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{N}^*$.

a) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(7-\sqrt{5}\right)^2$

c) $\left(2+3\sqrt{2}\right)^2$

d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{4}{5-\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{10}{1+\sqrt{11}}$

g) $\dfrac{3}{1-\sqrt{7}}$

h) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

QCM d'entrainement Dvpmt. et identités

QCM d'entrainement Racines et identités

13 Développement d'une expression algébrique

On dispose désormais de deux outils pour développer une expression algébrique :

Méthode – Développer une expression algébrique

- **Distribuer**
- **Utiliser une identité remarquable**

Exercice 32. Développer et simplifier les expressions suivantes.

$A(x) = (x-4)(-x+5)$

$B(x) = (x-4)^2$

$C(x) = (x+3)(x-3)$

$E(x) = (2x+1)(x-3) - 4x - 1$

$F(x) = (x-3)^2 - x(x+1)$

$G(x) = (2x+3)^2 + 1$

$H(x) = (3x-2)^2 - 3(x+2)(4x-3)$

$I(x) = (x+5)(x-5) - (x+1)^2$

14 Factorisation d'une expression algébrique

On dispose également de deux outils pour factoriser une expression algébrique :

Méthode – Factoriser une expression algébrique

- **Repérer un facteur commun**
- **Utiliser une identité remarquable**

Exemple. Factoriser et simplifier les expressions suivantes :

1. $(x+2)(3x+1) + 2(x+2)(x+4)$
2. $x^2 + 2x + 1$
3. $x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 - 4$
5. $9x^2 - 16$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}(x+2)(3x+1)+2(x+2)(x+4) &= (x+2)\Big((3x+1)+2(x+4)\Big)\\ &= (x+2)(3x+1+2x+8)\\ &= (x+2)(5x+9)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x^2+2x+1 &= x^2+2\times x\times 1+1^2\\ &= (x+1)^2 \quad \text{(première identité remarquable avec } a=x \text{ et } b=1)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x^2-6x+9 &= x^2-2\times x\times 3+3^2\\ &= (x-3)^2 \quad \text{(deuxième identité remarquable avec } a=x \text{ et } b=3)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}x^2-4 &= x^2-2^2\\ &= (x+2)(x-2) \quad \text{(troisième identité remarquable avec } a=x \text{ et } b=2)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}9x^2-16 &= (3x)^2-4^2\\ &= (3x+4)(3x-4) \quad \text{(troisième identité remarquable avec } a=3x \text{ et } b=4)\end{aligned}$$

Exercice 33.
Factoriser les expressions suivantes.
$A(x)=x(x+1)-2x$
$B(x)=(2x+3)(x-7)+(2x+3)(x+1)$
$C(x)=-2(x+1)+(x+1)^2$
$D(x)=(x-1)^2-16$
$E(x)=(x+2)^2-9x^2$
$F(x)=2(4x+5)(3x+7)+(3x+7)(2x-5)$
$G(x)=49-(x-5)^2$
$H(x)=x^2+2x+1$
$I(x)=4x^2-4x+1$
$J(x)=x^2-x+x(x+1)^2$
$K(x)=(x+2)^2-(2x+4)(x+3)+x^2+4x+4.$

QCM d'entrainement Identification des coefficients

QCM d'entrainement Identification des identités rem.

QCM d'entrainement Choix de la métho. de factorisation

Cinquième partie
Équations de degré supérieur

15 Degré d'une équation

Définition 7

Le degré d'une équation correspond à la plus grande puissance de l'inconnue dans la forme développée.

Exemples.

- $x^5 + 4x^2 + x = 3x + 1$ est une équation de degré 5.
- $(x+1)(x-2) = 0$ est une équation de degré 2 car en développant, on voit que cette équation équivaut à $x^2 - x - 2 = 0$.

Exercice 34. Dans chaque cas, indiquer quel est le degré de l'équation.

a) $x^2 + 3x - 5 = 2x$

b) $x^6 - x^5 + 4 = 3x^2 + 5x$

c) $x(x+4) = x$

d) $3x + 1 = 2x - 7$

e) $x + 5x(x+4) = x(x+2)$

f) $x(x+1)(x-5) = 0$

QCM d'entrainement Degré d'une équation

16 Résolution d'équations de degré supérieur

Méthode – Résoudre une équation compliquée (fractions, degré deux...)

Étape 1 : Se ramener au cas où l'un des membres est égal à 0.

Étape 2 : Factoriser l'expression autant que possible (ou mettre la fraction au même dénominateur).

Étape 3 : Utiliser la règle du produit nul ou du quotient nul ci-dessous.

Proposition 20 – Produit nul

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Proposition 21 – Quotient nul

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Exemples.

1. Résoudre l'équation $(2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2)$.
2. Résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x-2} = 3$.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& (2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2) \\
\iff & (2x+1)(x+3) - (2x+1)(-2x+2) = 0 \\
\iff & (2x+1)\Big((x+3) - (-2x+2)\Big) = 0 \\
\iff & (2x+1)\left(x+3+2x-2\right) = 0 \\
\iff & (2x+1)\left(3x+1\right) = 0
\end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul :

$$\begin{array}{ccc}
2x+1 = 0 & \text{ou} & 3x+1=0 \\
\iff 2x = -1 & & \iff 3x = -1 \\
\iff x = -\dfrac{1}{2} & & \iff x = -\dfrac{1}{3}
\end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{3}\right\}$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{2x+1}{x-2} = 3 \\
&\iff \frac{2x+1}{x-2} - 3 = 0 \\
&\iff \frac{2x+1}{x-2} - 3 \times \frac{x-2}{x-2} = 0 \\
&\iff \frac{2x+1}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = 0 \\
&\iff \frac{2x+1}{x-2} - \frac{3x-6}{x-2} = 0 \\
&\iff \frac{2x+1-3x+6}{x-2} = 0 \\
&\iff \frac{-x+7}{x-2} = 0 \\
&\iff -x+7 = 0 \\
&\iff x = 7
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{7\}$.

Exercice 35. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+3)(x-8)=0$
2. $(3x+7)(2+x)=0$
3. $4(x+7)(2-x)=0$
4. $(4x-7)(2x+3)=3(4x-7)(5x+11)$
5. $x^2+2x=-1$
6. $x^2=6x-9$
7. $(x-4)^2-9=0$
8. $(-x+1)^2=5$
9. $(x+7)^2=(x+7)(3x+4)$
10. $(-x+2)^2=-1$
11. $9x^2-1=(3x-1)(2x+5)$

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x+1}{2x-4}=0$
2. $\dfrac{x+1}{x-3}=4$
3. $\dfrac{4}{2x-5}=3$
4. $\dfrac{x^2-9}{-x+3}=0$
5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=0$
6. $\dfrac{2}{x}=\dfrac{-3}{x+1}+\dfrac{5}{x(x+1)}$

QCM d'entrainement Stratégie de résolution d'une équation

Sixième partie
Systèmes d'équations

17 Résolution de systèmes d'équations à deux inconnues

Méthode – Résoudre un système par combinaisons linéaires

On résout par exemple le système suivant : $\begin{cases} 2x+y = 7 \\ 3x-4y = -6 \end{cases}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2x+y = 7 \\ 3x-4y = -6 \end{cases}$$

Étape 1 : Multiplier chacune des deux équations par un nombre adéquat afin d'égaliser les coefficients devant x.

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3\times(2x+y) = 3\times 7 \\ 2\times(3x-4y) = 2\times(-6) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x+3y = 21 \\ 6x-8y = -12 \end{cases}$$

Étape 2 : Soustraire l'une des équations à l'autre afin d'obtenir une équation n'ayant plus qu'une seule inconnue.

$$\underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 6x+3y = 21 \\ -11y = -33 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x+3y = 21 \\ y = \dfrac{-33}{-11} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x+3y = 21 \\ y = 3 \end{cases}$$

Étape 3 : Reporter la valeur trouvée dans la première équation puis déterminer x.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x+3\times 3 = 21 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x = 12 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2\,;3)\}$.

Méthode – Résoudre un système par substitution

On résout par exemple le système suivant : $\begin{cases} 2x+y = 7 \\ 3x-4y = -6 \end{cases}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ 3x-4y &= -6 \end{cases}$$

Étape 1 : On exprime y en fonction de x dans la première équation.

$$\iff \begin{cases} y &= 7-2x \\ 3x-4y &= -6 \end{cases}$$

Étape 2 : Remplacer y par $7-2x$ dans la deuxième équation.

$$\iff \begin{cases} y &= 7-2x \\ 3x-4(7-2x) &= -6 \end{cases}$$

Étape 3 : Résoudre la deuxième équation pour déterminer x.

$$\iff \begin{cases} y &= 7-2x \\ 3x-28+8x &= -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= 7-2x \\ 11x &= 22 \end{cases}$$

Étape 4 : Reporter la valeur trouvée dans la première équation puis déterminer y.

$$\iff \begin{cases} y &= 7-2\times 2 \\ x &= 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= 3 \\ x &= 2 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2\,;3)\}$.

Exercice 37. Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant les deux méthodes :

1. $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+y &= -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x+y &= 5 \\ 4x-4y &= 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y &= -1 \\ x-y &= -3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+3y &= 1 \\ 2x-y &= -5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 17x+y &= 2 \\ 5x+y &= -10 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3} &= 5 \\ x-7y &= -5 \end{cases}$