Corrigé – Calculs et automatismes – Exercices

Exercice 1.

a) $-2+3-7=-6$

b) $(-3)+(-15)=-18$

c) $(-15)+18=3$

d) $7+(-11)-4=-8$

e) $-2-(-5)=-2+5=3$

f) $-3-(-6)+7=-3+6+7=10$

Exercice 2.

a) $(-4+5)-(-5+8)=1-3=-2$

b) $(-5-9-4)-(-4)=(-18)+4=-14$

c) $-5+2+(-1)-9=-13$

d) $-2+(9-(-5)+3)=-2+17=15$

e) $-3-(-6+3)=-3-(-3)=0$

f) $-1+(-1-3)-1+(-4)=-5$

Exercice 3.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{7}{15}=\dfrac{2\times 5}{3\times 5}+\dfrac{7}{15}=\dfrac{10}{15}+\dfrac{7}{15}=\dfrac{17}{15}$

b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2\times 2}{3\times 2}=\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{-2}{9}-\dfrac{-8}{15}=\dfrac{-2\times 5}{9\times 5}-\dfrac{-8\times 3}{15\times 3}=\dfrac{-10}{45}-\dfrac{-24}{45}=\dfrac{-10-(-14)}{45}=\dfrac{14}{45}$

d) $\dfrac{2}{11}+2=\dfrac{2}{11}+\dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{11}+\dfrac{2\times 11}{1\times 11}=\dfrac{24}{11}$

Exercice 4.

a) $\dfrac{7}{4}\div 2=\dfrac{7}{4}\div\dfrac{2}{1}=\dfrac{7}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\times 1}{4\times 2}=\dfrac{7}{8}$

b) $\dfrac{-2}{9}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{-8}{3}\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{-2\times 1}{9\times 2}-\dfrac{-2\times 4\times 5}{3\times 4}=\dfrac{-1}{9}-\dfrac{-10}{3}=\dfrac{-1}{9}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{-1}{9}+\dfrac{30}{9}=\dfrac{29}{9}$

c) $\dfrac{7}{12}\div\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{12}\div\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{6}\right)=\dfrac{7}{12}\div\dfrac{8}{6}=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{6}{8}=\dfrac{7}{2\times 6}\times\dfrac{6}{8}=\dfrac{7}{16}$

d) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

e) $\dfrac{2}{3}\times 2+\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{16}{12}+\dfrac{9}{12}=\dfrac{25}{12}$

f) $\dfrac{2}{3}\times\left(2+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{8}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{11}{4}=\dfrac{2\times 11}{3\times 2\times 2}=\dfrac{11}{6}$

Exercice 5.

a) $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{2}=1{,}5$: nombre fini de chiffres après la virgule.

b) $\dfrac{5}{4}=1+\dfrac{1}{4}=1{,}25$: nombre fini de chiffres après la virgule.

c) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{7}{3}=2+\dfrac{1}{3}\simeq 1{,}33$: nombre infini de chiffres après la virgule.

d) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{5}{10}-\dfrac{2}{10}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$: nombre fini de chiffres après la virgule.

e) $\dfrac{3}{8}=\dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=0{,}25+0{,}125=0{,}375$: nombre fini de chiffres après la virgule.

f) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{6}{3}=2$: nombre fini de chiffres après la virgule.

Exercice 6.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{60}{60}+\frac{30}{60}+\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{137}{60}$$

Exercice 7.

Soit n un entier positif et non nul.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}&=\frac{1\times(n+1)}{n\times(n+1)}-\frac{1\times n}{(n+1)\times n}\\&=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\\&=\frac{n+1-n}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Exercice 8.

a) $1+3^2=10$

b) $2\times 5^3=2\times 125=250$

c) $(2\times 5)^3=10^3=1000$

d) $2^{-1}+5^{-2}=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{25}=\dfrac{25}{50}+\dfrac{2}{50}=\dfrac{27}{50}$

Exercice 9.

a) Faux car $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}>0$

b) Vrai car $(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=\dfrac{1}{-8}\leqslant 0$

c) Faux car $(-3)^{-2}=\dfrac{(-3)^2}{=}\dfrac{1}{9}>0$

d) Vrai car $-2^2=-4\leqslant 0$

Exercice 10.

a) $10^2=100$

b) $10^{-4}=0{,}0001$

c) $14\times 10^{-1}=1{,}4$

d) $0{,}12\times 10^3=120$

e) $0{,}02\times 10^{-2}=0{,}0002$

f) $0{,}13\times 10^4=1300$

Exercice 11.

a) $135 = ,35.10^2$

b) $0{,}754 = 7{,}54.10^{-1}$

c) $115358 = 1{,}15358.10^5$

d) $\dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 2{,}5.10^{-1}$

e) $\dfrac{1}{8} = 0{,}125 = 1{,}25.10^{-1}$

f) $0{,}0045 = 4{,}5.10^{-3}$

Exercice 12.

a) $\sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{(-6)^2} = 6$

c) $(\sqrt{11})^2 = 11$

d) $\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = \sqrt{25^2} = 25$

Exercice 13.

a) $\sqrt{121} = 11$

b) $\sqrt{-16}$ n'existe pas.

c) $\sqrt{\sqrt{121}} = \sqrt{11}$

d) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

Exercice 14.

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{6} = \sqrt{7 \times 6} = \sqrt{42}$

b) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 = \sqrt{49}$

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{15}{5}} = \sqrt{3}$

d) $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$

e) $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$

f) $5\sqrt{7} = \sqrt{25} \times \sqrt{7} = \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{175}$

Exercice 15.

a) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$

e) $\sqrt{243} = \sqrt{243}$

f) $\sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}$

g) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{21} = 2\sqrt{21}$

Exercice 16.
Simplifier les termes de même degré revient en fait à factoriser. Par exemple,

$$2x + 3x = x(2 + 3) = x \times 5 = 5x \text{ (x est ici le facteur commun).}$$

En revanche, si les termes ne sont pas de même degré, cette factorisation ne donne pas de réelle simplification. Par exemple,

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

On ne peut plus ensuite simplifier davantage.

Exercice 17.

a) $5x + 7x = 12x$

b) $x - 3x = -2x$

c) $3x \times (-2) = -6x$

d) $-5x \times 3 + 1 = -15x + 1$

e) $x^2 + 3x + x^2 = 2x^2 + 3x$

f) $6x - 3x^2 + x - 5x^2 = -8x^2 + 7x$

g) $1 + 2x^2 \times 3 = 6x^2 + 1$

h) $2x - 1 + x^2 - 7 = x^2 + 2x - 8$

Exercice 18.

a) $3(x+2) = 3x + 3 \times 2 = 3x + 6$

b) $-(7 + 5x^2) = -7 - 5x^2$

c) $-(3 - x) = -3 + x$

d) $(x + x^2) - (3x - x^2) = x + x^2 - 3x + x^2 = 2x^2 - 2x$

e) $-7(x+1) + 3(2x+1) = -7x - 7 + 6x + 3 = -x - 4$

f) $-x(-2x - 1) - (x - 1) = 2x^2 + x - x + 1 = 2x^2 + 1$

g) $(x - 3) \times x = x^2 - 3x$

h) $-x^3(x^2 + x^4) = -x^5 - x^7$

Exercice 19.

a) $\frac{1}{2}(2x+3) = \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times 3 = x + \frac{3}{2}$

b) $\frac{7}{3}(-15x + 3) = \frac{7 \times (-15)x}{3} + \frac{7}{3} \times 3 = \frac{7 \times (-5) \times 3x}{3} + \frac{7}{3} \times 3 = -35x + 7$

c) $\frac{10}{7}(7x^2 + 28x - 10) = \frac{10}{7} \times 7x^2 + \frac{10}{7} \times 28x + \frac{10}{7} \times (-10) = 10x^2 + 40x - \frac{100}{7}$

d) $-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) x + \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = x + \frac{1}{3}$

e) $\frac{-(2x+4)}{2} = \frac{-2x - 4}{2} = \frac{-2x}{2} - \frac{4}{2} = -x - 2$

f) $\frac{4(10x + 15x^2)}{5} = \frac{40x + 60x^2}{5} = \frac{40x}{5} + \frac{60x^2}{5} = 8x + 12x^2$

Exercice 20.

a) $x^2(x+6) = x^3 + 6x$

b) $7(3x+2) = 21x + 14$

c) $x(-x+4) = -x^2 + 4x$

d) $-3(-2x-1) = (-3) \times (-2x) + (-3) \times (-1) = 6x + 3$

Exercice 21.

1. $\mathcal{S} = \{-6\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{5}\right\}$
3. $\mathcal{S} = \{4\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{7}\right\}$
5. $\mathcal{S} = \{1\}$
6. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice 22.

1. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{5}\right\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{16}{7}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \{-3\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{28}{31}\right\}$
6. $\mathcal{S} = \{-3\}$
7. $\mathcal{S} = \{0\}$
8. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{29}{2}\right\}$

Exercice 23.

1. $\mathcal{S} =]-\infty\,; -6[$
2. $\mathcal{S} =]5\,; +\infty[$
3. $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{7}{5}\,; +\infty\right[$
4. $\mathcal{S} =]-\infty\,; 4]$
5. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\dfrac{1}{7}\right]$
6. $\mathcal{S} =]-\infty\,; 1]$
7. $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; +\infty\right[$

Exercice 24.

1. $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{7}{2}\,; +\infty\right[$
2. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \dfrac{5}{3}\right[$
3. $\mathcal{S} = \left]\dfrac{16}{7}\,; +\infty\right[$
4. $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{1}{3}\,; +\infty\right[$

5. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{28}{31}\right]$
6. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-3\right[$
7. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;0\right[$
8. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{29}{2}\right]$

Exercice 25.
$A(x) = x^2 + 3x$: forme développé
$B(x) = x(x-3)$: forme factorisée
$C(x) = (x+1)^2$: forme factorisée
$D(x) = x^2 - 2x + 1$: forme développée
$E(x) = x^2 - 3x$: forme développée
$F(x) = (x-4)^2$: forme factorisée

Exercice 26.
$A(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$B(x) = (x-5)(7-x) = x^2 + 12x - 35$
$C(x) = (-x-5)(x+1) = -x^2 - 6x - 5$
$D(x) = (3+x^2)(x+x^2) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x$
$E(x) = (-3-x^2)(-x-1) = x^3 + x^2 + 3x + 3$
$F(x) = 3(x-1)(x+2) = 3x^2 + 3x - 6$
$G(x) = -(2+x)(x^2+1) = -x^3 - 2x^2 - x - 2$
$H(x) = -2(7+x)(x^2-1) = -2x^3 - 14x^2 + 2x + 14$

Exercice 27.
$A(x) = 3x + 3 = 3(x+1)$
$B(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$
$C(x) = 4x - 2 = 2(2x-1)$
$D(x) = x^2 + 3x = x(x+3)$
$E(x) = x^2 - x = x(x-1)$
$F(x) = 7x + 7x^2 = 7x(1+x)$
$G(x) = x - 5x^3 = x(1-5x^2)$

Exercice 28.
$A(x) = 7x^2 - 5x^3 = x^2(7-5x)$
$B(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3+1)$
$C(x) = 4x^3 + 2x = 2x(x^2+2)$
$D(x) = x^5 - x = x(x^4-1)$
$E(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2+x+1)$
$F(x) = 7 + 7x^2 + 7x^5 = 7(1+x^2+x^5)$
$G(x) = -3x^7 + x^5 - 6x^2 = x^2(-3x^5 + x^3 - 6)$

Exercice 29.

1. $A(x) = (x-1)(x+2)$ et $B(x) = x^2 + x - 2$
   Vrai. En développant $A(x)$, on trouve $A(x) = x^2 + x - 2$.

2. $A(x) = -x^2(-x+1)$ et $B(x) = x(x^2-x)$
   Vrai. $A(x) = x^3 - x^2$ et $B(x) = x^3 - x^2$.

3. $A(x) = -(x+1)(x+2)$ et $B(x) = -x^2 + 3x + 2$
   Faux. Par exemple, pour $x = 1$:

$A(1) = -(1+1)(1+2) = -6$ et $B(1) = -1^2 + 3 \times 1 + 2 = 4$

4. $A(x) = x(x+4) - 2$ et $B(x) = -2(1+2x) + x^2$.
   Faux. Par exemple $A(2) = 2(2+4) - 2 = 10$ et $B(2) = -2(1+2\times 2) + 2^2 = -6$.

5. $A(x) = x(x+4) + 2x$ et $B(x) = -x(-x-6)$
   Vrai. $A(x) = x^2 + 6x$ et $B(x) = x^2 + 6x$.

Exercice 30.

$A(x) = (x+5)^2 = x^2 + 10x^25$

$B(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$C(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$D(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$E(x) = (x-4)(x+4) = x^2 - 10$

$F(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$G(x) = (4x+5)^2 = 16x^2 + 40x + 25$

$H(x) = (3x-2)(3x+2) = 9x^2 - 4$

Exercice 31.

a) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

b) $\left(7-\sqrt{5}\right)^2 = 54 - 14\sqrt{5}$

c) $\left(2+3\sqrt{2}\right)^2 = 22 + 12\sqrt{2}$

d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

e) $\dfrac{4}{5-\sqrt{2}} = \dfrac{20}{23} + \dfrac{4}{23} \times \sqrt{2}$

f) $\dfrac{10}{1+\sqrt{11}} = -1 + \sqrt{11}$

g) $\dfrac{3}{1-\sqrt{7}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \sqrt{7}$

h) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -3 + 2\sqrt{2}$

Exercice 32.
$A(x) = (x-4)(-x+5) = -x^2 + 9x - 20$
$B(x) = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
$C(x) = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$D(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$E(x) = (2x+1)(x-3) - 4x - 1 = 2x^2 - 9x - 4$
$F(x) = (x-3)^2 - x(x+1) = -7x + 9$
$G(x) = (2x+3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$
$H(x) = (3x-2)^2 - 3(x+2)(4x-3) = -3x^2 - 21x + 22$
$I(x) = (x+5)(x-5) - (x+1)^2 = -2x - 26$

Exercice 33.
$A(x) = x(x+1) - 2x = x(x-1)$
$B(x) = (2x+3)(x-7) + (2x+3)(x+1) = (2x+3)(2x-6)$
$C(x) = -2(x+1) + (x+1)^2 = (x+1)(x-1)$
$D(x) = (x-1)^2 - 16 = (x-5)(x+3)$
$E(x) = (x+2)^2 - 9x^2 = (-2x+2)(4x+2)$
$F(x) = 2(4x+5)(3x+7) + (3x+7)(2x-5) = (3x+7)(10x+5)$
$G(x) = 49 - (x-5)^2 = (7+x)(12-x)$

$H(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$I(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$
$J(x) = x^2 - x + x(x+1)^2 = x \times (x - 1 + x + 1) = 2x^3$
$K(x) = (x+2)^2 - (2x+4)(x+3) + x^2 + 4x + 4 = (x+2)(-x-4)$.

Exercice 34.

a) $x^2 + 3x - 5 = 2x$: degré 2

b) $x^6 - x^5 + 4 = 3x^2 + 5x$: degré 6

c) $x(x+4) = x$: degré 2

d) $3x + 1 = 2x - 7$: degré 1

e) $x + 5x(x+4) = x(x+2)$: degré 2

f) $x(x+1)(x-5) = 0$: degré 3

Exercice 35.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $(x+3)(x-8) = 0$
   D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :
   $$\begin{array}{rcl} x+3=0 & \text{ou} & x-8=0 \\ \iff x=-3 & & \iff x=8 \end{array}$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\,;8\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $(3x+7)(2+x) = 0$
   D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :
   $$\begin{array}{rcl} 3x+7=0 & \text{ou} & 2+x=0 \\ \iff 3x=-7 & & \iff x=-2 \\ \iff x=-\dfrac{7}{3} & & \end{array}$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{3}\,;-2\right\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,
   $4(x+7)(2-x) = 0$
   D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :
   $$\begin{array}{ccccc} 4=0 & \text{ou} & x+7=0 & \text{ou} & 2-x=0 \\ \text{impossible} & & \iff x=-7 & & \iff x=2 \end{array}$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-7\,;2\}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &(4x-7)(2x+3) = 3(4x-7)(5x+11) \\ \iff &(4x-7)(2x+3) - 3(4x-7)(5x+11) = 0 \\ \iff &(4x-7) \times ((2x+3) - 3(5x+11)) = 0 \\ \iff &(4x-7) \times (2x+3-15x-33) = 0 \\ \iff &(4x-7)(-13x-30) = 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} 4x-7=0 &\quad \text{ou} \quad -13x-30=0 \\ \iff 4x = 7 &\quad\quad\;\; \iff -13x = 30 \\ \iff x = \frac{7}{4} &\quad\quad\;\; \iff x = -\frac{30}{13} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{4}\,; -\frac{30}{13}\right\}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x = -1 \\ \iff &x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \iff &(x+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+1=0 &\quad \text{ou} \quad x+1=0 \\ \iff x = -1 &\quad\quad\;\; \iff x = -1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &x^2 = 6x - 9 \\ \iff &x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \iff &(x-3)^2 = 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} x-3=0 &\quad \text{ou} \quad x-3=0 \\ \iff x = 3 &\quad\quad\;\; \iff x = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{3\}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &(x-4)^2 - 9 = 0 \\ \iff &(x-4)^2 - 3^2 = 0 \\ \iff &((x-4)-3)\,((x-4)+3) = 0 \\ \iff &(x-7)\,(x-1) = 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} x-7=0 &\quad \text{ou} \quad & x-1=0 \\ \iff x=7 & & \iff x=1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{7\,;1\}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & (-x+1)^2=5 \\ \iff & (-x+1)^2-5=0 \\ \iff & (-x+1)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=0 \\ \iff & \left((-x+1)-\sqrt{5}\right)\left((-x+1)+\sqrt{5}\right)=0 \\ \iff & \left(-x+1-\sqrt{5}\right)\left(-x+1+\sqrt{5}\right)=0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} -x+1-\sqrt{5}=0 &\quad \text{ou} \quad & -x+1+\sqrt{5}=0 \\ \iff x=-1+\sqrt{5} & & \iff x=-1-\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-1+\sqrt{5}\,;-1-\sqrt{5}\right\}$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & (x+7)^2=(x+7)(3x+4) \\ \iff & (x+7)^2-(x+7)(3x+4)=0 \\ \iff & (x+7)\times((x+7)-(3x+4)) \\ \iff & (x+7)\times(x+7-3x-4) \\ \iff & (x+7)(-2x+3) \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} x+7=0 &\quad \text{ou} \quad & -2x+3=0 \\ \iff x=-7 & & \iff 2x=3 \\ & & x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-7\,;\frac{3}{2}\right\}$.

10. L'équation $(-x+2)^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car un carré ne peut pas être négatif.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& 9x^2 - 1 = (3x-1)(2x+5) \\
\iff & 9x^2 - 1 - (3x-1)(2x+5) = 0 \\
\iff & (3x-1))\,(3x+1) - (3x-1)(2x+5) = 0 \\
\iff & (3x-1) \times ((3x+1) - (2x+5)) = 0 \\
\iff & (3x-1) \times (3x+1-2x-5) = 0 \\
\iff & (3x-1)(x-4) = 0
\end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned}
& 3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad && x - 4 = 0 \\
\iff & x = \frac{1}{3} && \iff x = 4
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\,;4\right\}$.

Exercice 36.

1. On résout $\dfrac{x+1}{2x-4} = 0$.
Les valeurs interdites sont les x tels que $2x - 4 = 0 \iff x = 2$.
D'après la règle du quotient nul pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{2x-4} = 0 \\
\iff & x + 1 = 0 \\
\iff & x = -1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-1\}$.

2. On résout $\dfrac{x+1}{x-3} = 4$.
Les valeurs interdites sont les x tels que $x - 3 = 0 \iff x = 3$.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-3} = 4 \\
\iff & \frac{x+1}{x-3} - 4 = 0 \\
\iff & \frac{x+1}{x-3} - \frac{4(x-3)}{x-3} = 0 \\
\iff & \frac{-3x+13}{x-3} = 0 \\
\iff & -3x + 13 = 0 \ \ \text{(règle du quotient nul)} \\
\iff & x = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{13}{3}\right\}$.

3. On résout $\dfrac{4}{2x-5}=3$.
Les valeurs interdites sont les x tels que $2x-5=0 \iff x=\frac{5}{2}$.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{2x-5}=3 \\
\iff\ & \frac{4}{2x-5}-3=0 \\
\iff\ & \frac{4}{2x-5}-\frac{3(2x-5)}{2x-5}=0 \\
\iff\ & \frac{-6x+19}{2x-5}=0 \\
\iff\ & -6x+19=0 \ \text{ (règle du quotient nul)} \\
\iff\ & x=\frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{19}{6}\right\}$.

4. On résout $\dfrac{x^2-9}{-x+3}=0$.
Les valeurs interdites sont les x tels que $-x+3=0 \iff x=3$.
D'après la règle du quotient nul, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2-9}{-x+3}=0 \\
\iff\ & x^2-9=0 \\
\iff\ & (x-3)(x+3)=0 \\
\iff\ & x-3=0 \quad \text{ou} \quad x+3=0 \ \text{ (règle du produit nul)} \\
\iff\ & x=3 \quad \text{ou} \quad x=-3
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme 3 est une valeur interdite, la seule solution est -3.
Ainsi, $\mathcal{S}=\{-3\}$.

5. On résout $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=0$.
Les valeurs interdites sont $x=0$ et $x=-1$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=0 \\
\iff\ & \frac{1\times(x+1)}{x(x+1)}+\frac{2x}{x(x+1)}=0 \\
\iff\ & \frac{3x+1)}{x(x+1)}=0 \\
\iff\ & 3x+1=0 \ \text{ (règle du quotient nul)} \\
\iff\ & x=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

6. On résout $\dfrac{2}{x} = \dfrac{-3}{x+1} + \dfrac{5}{x(x+1)}$.
   Les valeurs interdites sont $x = 0$ et $x = -1$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{x} = \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{x(x+1)} \\
\iff & \frac{2}{x} - \frac{-3}{x+1} - \frac{5}{x(x+1)} = 0 \\
\iff & \frac{2(x+1)}{x(x+1)} - \frac{-3x}{x(x+1)} - \frac{5}{x(x+1)} = 0 \\
\iff & \frac{5x-3}{x(x+1)} = 0 \\
\iff & 5x - 3 = 0 \;\; \text{(règle du quotient nul)} \\
\iff & x = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$.

Exercice 37.

1. $\mathcal{S} = \{(-3\,;4)\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{7}{12}\,;-\dfrac{5}{6}\right)\right\}$
3. $\mathcal{S} = \{(-2\,;1)\}$
4. $\mathcal{S} = \{(-2\,;1)\}$
5. $\mathcal{S} = \{(1\,;-15)\}$
6. $\mathcal{S} = \{(16\,;3)\}$