Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 9
Généralités sur les fonctions

Table des matières

1 Définitions et généralités

1.1 Notion de fonction, d'image et d'antécédent

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$. Définir une fonction f sur $\mathcal{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathcal{D}$, un unique réel noté $f(x)$ et appelé image de x. On note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

$$x \in \mathcal{D} \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow f(x)$$

Définition 2

- $\mathcal{D}$ est appelé l'**ensemble de définition** de f.
- Si y est **L'image** de x par la fonction f, on écrit $y = f(x)$
- Si $y = f(x)$, on dit aussi que x est **UN antécédent** de y par la fonction f.

Remarque.

- En général, $\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Cela correspond à tous les nombres que l'on peut placer dans la « machine » f.
- Un nombre de l'ensemble de définition admet toujours une seule image.
- Un nombre peut admettre un, plusieurs ou aucun antécédents.

Exemple.

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array} \right.$. Quelle est l'image de 2 par f ?

Solution :
$f : 2 \longmapsto 2^2 + 3 = 7$.
L'image de 2 par la fonction f est donc 7. On écrit aussi $f(2) = 7$.

$$2 \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow 7$$

Remarque.

Dans l'exemple précédent, on dit aussi que 2 est un antécédent de 7 par la fonction f. Ce n'est pas le seul car $f : -2 \longmapsto (-2)^2 + 3 = 7$ donc -2 est un autre antécédent de 7 par la fonction f.

Définition 3

On appelle **courbe représentative** de f, notée $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

Exemple.
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array} \right.$. Le point $M\,(3\,;12)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

Solution :
- D'une part, $3 \in [0\,;10]$.
- D'autre part, $f : 3 \longmapsto 3^2+3 = 12$. On a donc bien $f(3) = 12$

Ainsi, le point $M\,(3\,;12)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

1.2 Fonctions paires et fonctions impaires

Définition 4

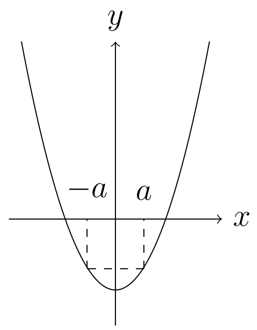
Un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ est centré en 0 signifie que si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$

Définition 5

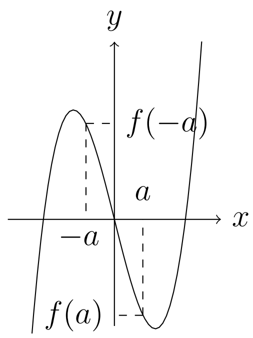
- Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **paire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ est centré en } 0 \\ \text{Pour tout } x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x) \end{array} \right.$$
- Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **impaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ est centré en } 0 \\ \text{Pour tout } x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right.$$

Proposition 1

- f est paire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport l'origine du repère.



Fonction paire



Fonction impaire

Proposition 2

Si f est une fonction impaire, alors $f(0) = 0$.

Démonstration.
On sait que pour tout x, $f(-x) = -f(x)$.
En particulier, pour $x = 0$, on a : $f(0) = -f(0)$.
On en déduit que $2f(0) = 0$ et donc que $f(0) = 0$. □

Méthode – Étudier la parité d'une fonction

1. On vérifie que l'ensemble de définition est centré en 0.
2. On calcule $f(-x)$ d'une part et $f(x)$ d'autre part et on compare les résultats obtenus.

Exemple.
Étudier la parité de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = x^2 + 2$.

Solution :

- L'ensemble de définition $[-1\,;1]$ est centré en 0 car si $x \in [-1\,;1]$, alors $-x \in [-1\,;1]$.
- Soit $x \in [-1\,;1]$.
  D'une part, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2$.
  D'autre part, $f(x) = x^2 + 2$.
  Ainsi, $f(x) = f(-x)$ et la fonction f est donc paire.

Remarque.
Attention ! Les fonctions paires et impaires sont des cas particuliers. La plupart des fonctions en mathématiques ne sont ni paires, ni impaires.

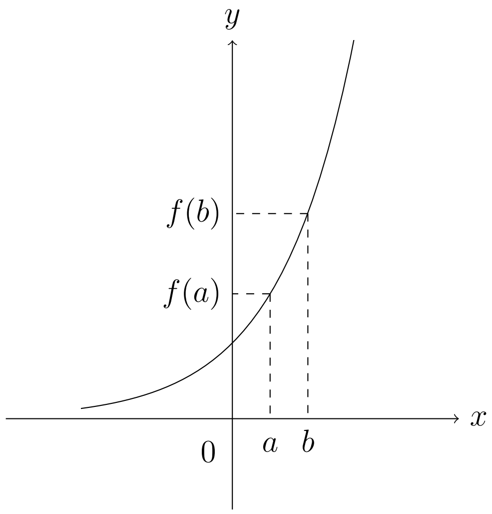
2 Variations et extrema d'une fonction

2.1 Variations

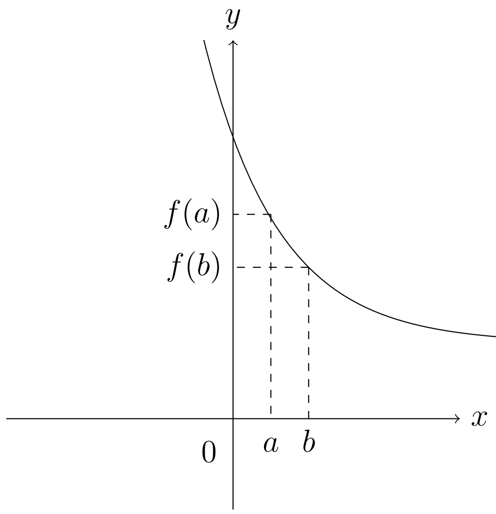
Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si pour tous $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.



Fonction croissante



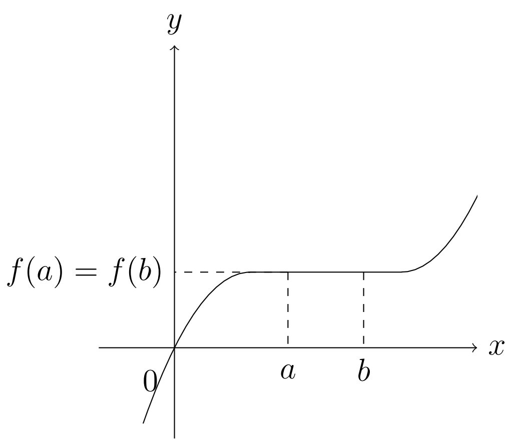
Fonction décroissante

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **strictement croissante** sur I si pour tous $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tous $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **strictement monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Remarque.
La fonction ci-dessous est croissante mais n'est pas strictement croissante.



Exemple.
Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 4x^2 - 3$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Solution :
On considère deux réels a et b appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.
On va montrer que $f(a) \leqslant f(b)$. En fait :

$$\begin{aligned} & a \leqslant b \\ \text{donc } & a^2 \leqslant b^2 \\ \text{donc } & 4a^2 \leqslant 4b^2 \\ \text{donc } & 4a^2 - 3 \leqslant 4b^2 - 3 \\ \text{donc } & f(a) \leqslant f(b). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tous $a, b \in [0\,;+\infty[$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
Cela signifie exactement que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

Exemple.
Montrer que la fonction $f : x \longmapsto -2x + 5$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution :
On considère deux réels a et b appartenant à $\mathbb{R}$ et tels que $a \leqslant b$.
On va montrer que $f(a) \geqslant f(b)$. En fait :

$$\begin{aligned} & a \leqslant b \\ \text{donc } & -2a \geqslant -2b \\ \text{donc } & -2a + 5 \geqslant -2b + 5 \\ \text{donc } & f(a) \geqslant f(b). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.
Cela signifie exactement que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

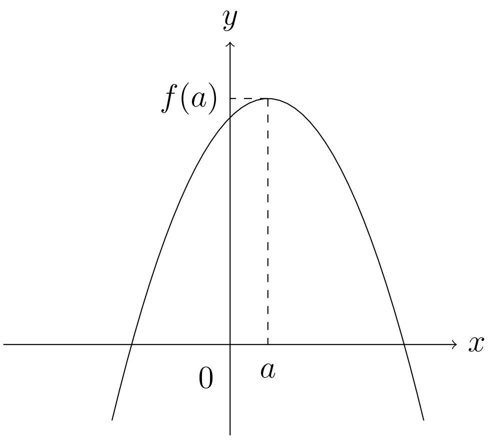
Remarque.
Dans un tableau de variations, par convention, une flèche indique la stricte croissance ou la stricte décroissance d'une fonction.

2.2 Extrema

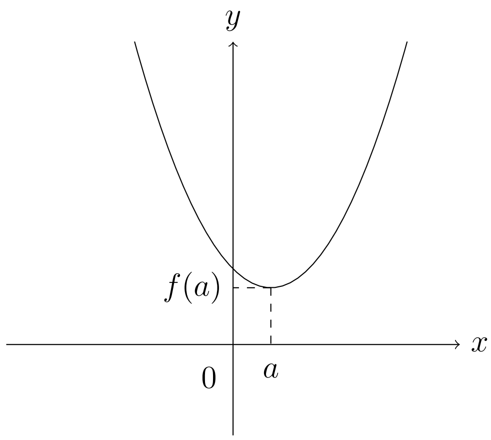
Définition 8

- Dire que la fonction f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant f(a)$.

- Dire que la fonction f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

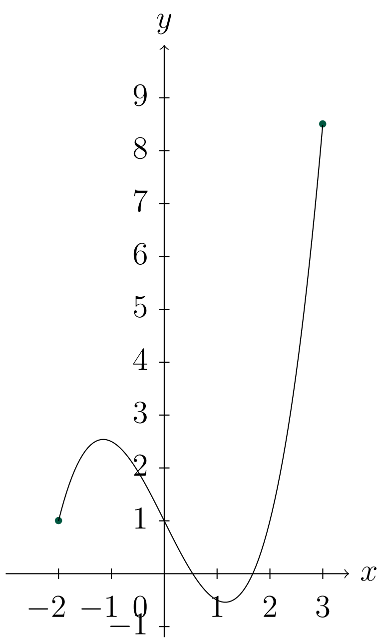


Maximum



Minimum

Exemple.
Déterminer graphiquement le minimum et le maximum de la fonction suivante définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$. En quelles valeurs sont-ils atteints ?



Solution :
Le minimum est environ $-0{,}5$. Il est atteint en $x = 1{,}1$.
Le maximum est environ $8{,}5$. Il est atteint en $x = 3$.

3 Fonctions de référence

3.1 Fonctions affines

Définition 9

Une fonction affine est une fonction de la forme

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx + p \end{array} \right.$$

où m et p sont des réels.

Remarque.
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Définition 10

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- m est appelé le coefficient directeur. Si $m = 0$, la fonction f est dite **constante**.
- p est appelé **ordonné à l'origine**. Si $p = 0$, la fonction f est dite **linéaire**.

Proposition 3

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

Démonstration.
On a $f(a) = ma + p$ et $f(b) = mb + p$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(mb + p) - (ma + p)}{b - a} \\ &= \frac{mb + p - ma - p}{b - a} \\ &= \frac{m(b - a)}{b - a} \\ &= m \end{aligned}$$

□

Méthode – Déterminer une fonction affine passant par deux points

- On traduit les coordonnées des points en terme d'images
- On détermine le coefficient directeur m à l'aide de la Proposition 3.
- On détermine l'ordonnée à l'origine p à partir de l'une des deux images connues.

Exemple.
Soit A$(1\,;2)$ et B$(3\,;7)$.
Déterminer la fonction affine f dont la courbe représentative est la droite (AB).

Solution :
f est de la forme $f(x) = mx + p$.
Or, les points A et B appartiennent à la courbe représentative de f donc $f(1) = 2$ et $f(3) = 7$.

On a donc $m = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{7 - 2}{3 - 1} = \dfrac{5}{2}$.

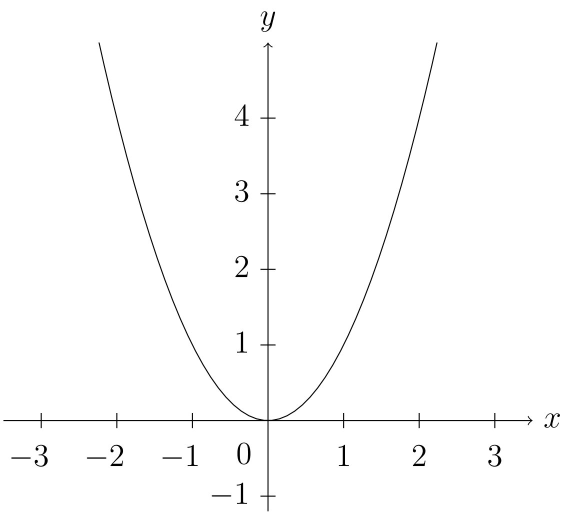
Ainsi, f est de la forme $f(x) = \dfrac{5}{2}x + p$.
Comme $f(1) = 2$, on a :
$\dfrac{5}{2} \times 1 + p = 2$
Donc $p = 2 - \dfrac{5}{2}$
Donc $p = -\dfrac{1}{2}$.
Finalement, f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

3.2 Fonction carrée

Définition 11

La fonction carrée est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$



Fonction carrée

Proposition 4

La fonction carrée est paire.

Démonstration.

- L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

$\square$

Proposition 5

La fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. Cela découle directement du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. $\square$

Proposition 6

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration.

- Montrons que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Pour cela, on considère deux réels a et b appartenant à $[0;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \leqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \geqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(b) - f(a) & = & b^2 - a^2 \\ & = & (b-a)(b+a) \\ & \geqslant & 0 \quad \text{car} \quad b-a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b+a \geqslant 0 \end{array}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \leqslant f(b)$ et on a donc montré que f est croissante sur $[0;+\infty[$
- Montrons maintenant que f est décroissante sur $]-\infty;0]$.
  Pour cela, on considère deux réels a et b appartenant à $]-\infty;0]$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(b) - f(a) & = & b^2 - a^2 \\ & = & (b-a)(b+a) \\ & \leqslant & 0 \quad \text{car} \quad b-a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b+a \leqslant 0 \end{array}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \geqslant f(b)$ et on a donc montré que f est décroissante $]-\infty;0]$.

$\square$

3.3 Fonction inverse

Définition 12

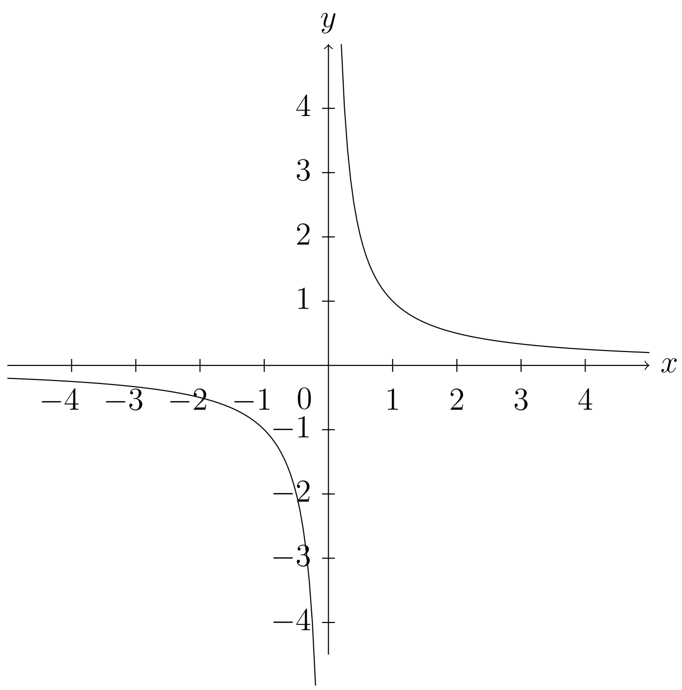
La fonction inverse est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

Remarque.
Le calcul d'image suivant justifie le nom de « fonction inverse » :
Pour tous entiers a et b non nuls,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Or, $\dfrac{b}{a}$ est bien l'inverse de $\dfrac{a}{b}$.



Fonction inverse

Proposition 7

La fonction inverse est impaire.

Démonstration.

- L'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

□

Proposition 8

La fonction inverse est strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$.

Démonstration.
Il est immédiat de voir que si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$ et que si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$. □

Proposition 9

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Démonstration.

- Montrons que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
  Pour cela, on considère deux réels a et b appartenant à $]0; +\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ &= \frac{a-b}{ab} \\ &\leqslant 0 \quad \text{car} \quad a - b \leqslant 0 \quad \text{et} \quad ab \geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \geqslant f(b)$ et on a donc montré que f est décroissante sur $]0; +\infty[$
- Montrons maintenant que f est décroissante sur $]-\infty; 0[$.
  Pour cela, on considère deux réels a et b appartenant à $]-\infty; 0[$ et tels que $a \leqslant b$.
  On veut montrer qu'alors $f(a) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \leqslant 0$.
  En fait, on a :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ &= \frac{a-b}{ab} \\ &\leqslant 0 \quad \text{car} \quad a - b \leqslant 0 \quad \text{et} \quad ab \geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, on a montré que $f(a) \geqslant f(b)$ et on a donc montré que f est décroissante $]-\infty; 0[$. □

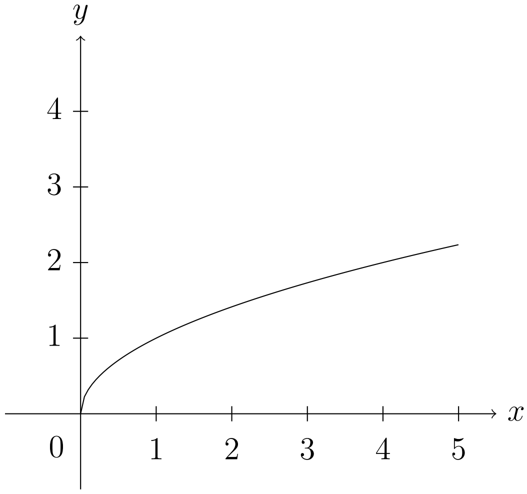
Remarque.
Il serait FAUX de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$!
Par exemple, avec $a = -1$ et $b = 1$, on voit que $a \leqslant b$ et que $f(a) \leqslant f(b)$.

3.4 Fonction racine carrée

Définition 13

La fonction racine carrée est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$



Fonction racine carrée

Rappel.
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$,
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Proposition 10

La fonction racine carrée est positive sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration.
Le nombre réel $\sqrt{x}$ est défini comme étant l'unique nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.
Ainsi, par définition, $\sqrt{x} \geqslant 0$. □

Proposition 11

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

Démonstration.
Montrons que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Pour cela, on considère deux réels a et b appartenant à $[0\,;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.

On veut montrer qu'alors $f(a) \leqslant f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \geqslant 0$.
En fait, on a :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sqrt{b} - \sqrt{a} \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \geqslant 0 \quad \text{car} \quad b - a \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $f(a) \leqslant f(b)$ et on a donc montré que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

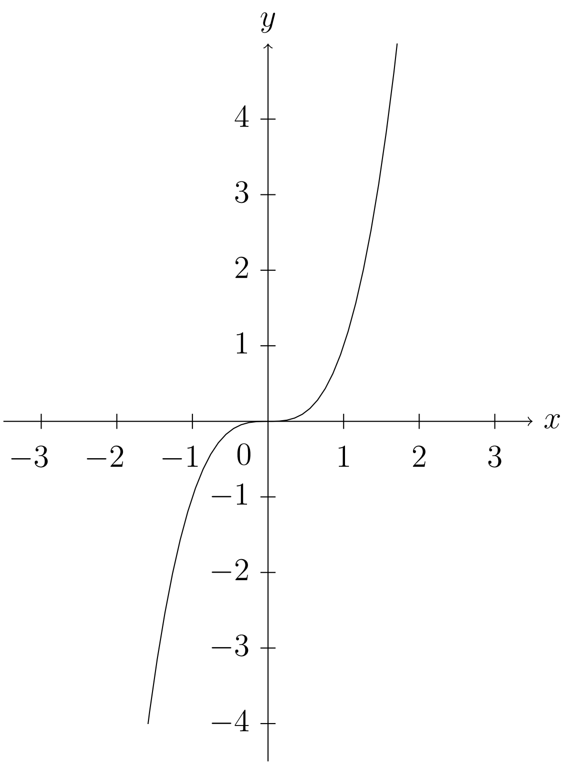
□

3.5 Fonction cube

Définition 14

La fonction cube est définie comme étant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$



Fonction cube

Proposition 12

La fonction cube est impaire.

Démonstration.

- L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

$\square$

Proposition 13

La fonction cube est négative sur $[-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration.

Pour tout $x \leqslant 0$, $x^3 \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 0$. Cela découle directement de la règle des signes. $\square$

Proposition 14

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

Démonstration.

La preuve est similaire à la preuve des variations de la fonction carrée en utilisant l'identité remarquable suivante :

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2).$$

$\square$

3.6 Fonction valeur absolue

3.6.1 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 15

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est notée $|x|$ et définie par :

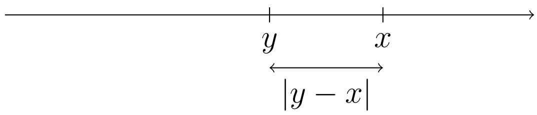
$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple.

- $|2| = 2$ (car $2 \geqslant 0$) ;
- $|-2| = -(-2) = 2$ (car $-2 < 0$).

Proposition 15

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$.
- La distance entre x et 0 est $|x|$.
- La distance entre x et y est $|y - x|$.



Démonstration.
- La distance entre x et 0 est x ou $-x$ selon si x est positif ou négatif. C'est, par définition, la valeur absolue de x.
- La distance entre x et y est $y - x$ si $y \geqslant x$ et $x - y$ si $x \geqslant y$. Dans tous les cas, il s'agit bien de la valeur absolue $|y - x|$ car $x - y = -(y - x)$.

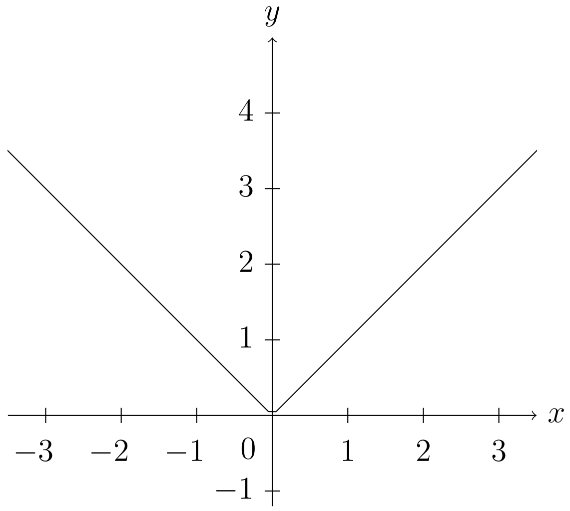
□

3.6.2 Fonction valeur absolue

Définition 16

La fonction valeur absolue est définie comme étant la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$$



Fonction valeur absolue

Proposition 16

La fonction valeur absolue est paire.

Démonstration.

- L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, c'est-à-dire que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

□

Proposition 17

La fonction valeur absolue est positive

Démonstration.
Si $x \geqslant 0$, $|x| = x \geqslant 0$.
Par ailleurs, si $x < 0$, $|x| = -x > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$. □

Proposition 18

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration.
Sur $[0; +\infty[$, $|x| = x$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue sur $[0; +\infty[$ est donc une demi-droite croissante.
Sur $]-\infty; 0]$, $|x| = -x$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue sur $]-\infty; 0]$ est donc une demi-droite décroissante. □

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer des images et des antécédents.
- Déterminer les coordonnées d'un point de la courbe représentative d'une fonction.
- Étudier la parité d'une fonction et en déduire des propriétés de symétrie.
- Résoudre une équation ou une inéquation faisant intervenir des fonctions (graphiquement et par le calcul).
- Déterminer le signe d'une fonction en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
- Montrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle.
- Déterminer les extrema d'une fonction.
- Déterminer les propriétés d'une fonction affine (variations, signes, coefficient directeur, ordonnées à l'origine).
- Déterminer une fonction affine passant par deux points donnés.
- Connaître et utiliser les propriétés des fonctions de référence (carrée, inverse, racine carrée, cube, valeur absolue).

QCM d'entrainement