Applications du produit scalaire – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★			4, 11, 12, 14	14	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13	
Exercices ★★	18, 19, 20		5, 9, 10, 15, 16, 18, 19, 20, 21		5, 10, 15, 16, 18, 19, 20, 21	
Exercices ★★★	17, 22, 23, 24		17, 23, 24	23, 24	17, 22	

Exercice 1 ★ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) ainsi qu'un vecteur normal.

1. $A(2\,;1)$ et $B(1\,;0)$
2. $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;1)$
3. $A(2\,;-1)$ et $B(2\,;0)$
4. $A(\sqrt{2}\,;1)$ et $B(\sqrt{3}\,;\sqrt{2})$

Exercice 2 ★ [Calculer]

Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de chaque droite dont une équation est donnée.

1. $3x+5y-1=0$
2. $3x+8y=4$
3. $y=3x+2$
4. $2x=5$
5. $y=-7$
6. $-y+5x+8=0$

Exercice 3 ★ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $A(2\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
2. $A(-2\,;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$
3. $A(2\,;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Exercice 4 ★ [Représenter, Calculer]

Dans chaque cas, déterminer si la droite D_1 et la droite D_2 sont perpendiculaires ou non.

1.
   - D_1 : $2x+5y+8=0$
   - D_2 : $5x-2y-1=0$
2.
   - D_1 passant par les points $\mathrm{I}\,(1\;4)$ et $\mathrm{J}\,(2\,;1)$.
   - D_2 passant par les points $\mathrm{K}\left(\sqrt{2}-2\;-1\right)$ et $\mathrm{L}\left(\sqrt{2}+1\,;-2\right)$.
3.
   - D_1 : $-6y=3x$
   - D_2 de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 5 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $(3\,;1)$ ainsi que la droite (d) d'équation cartésienne $x - 3y - 4 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 7 appartenant à la droite (d).
2. Donner un vecteur normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.
4. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).
5. Calculer la distance AH et en donner une interprétation.

Exercice 6 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

1. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(3\,;4)$ et de rayon 5.
2. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(-1\,;\pi)$ et de diamètre $\sqrt{5}$.
3. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB] où $\mathrm{A}\,(-5\,;2)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{5}{9}\right)$.
4. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(1\,;-4)$ et passant par le point $\mathrm{A}\,(5\,;6)$.

Exercice 7 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle défini par l'équation donnée.

1. $(x-1)^2 + \left(y + \dfrac{5}{4}\right)^2 = 9$
2. $x^2 + y^2 = 7$
3. $x^2 + y^2 + 2x = 0$
4. $x^2 + y - 1 = x - y^2 + 1$
5. $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 33$
6. $3x^2 + 3y^2 + x - 2y - 17 = 0$
7. $(x+1)(x-2) + (y-4)(y+5) = 0$
8. $(x-1)^2 - (y+8)^2 = 1$

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, indiquer si l'équation définit un cercle. Dans le cas échéant, déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle défini par l'équation donnée.

1. $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 1$
2. $x^3 + y^3 - 3y + 2x = 17$
3. $x^2 + y^2 = 5$
4. $5x^2 + 5y^2 - x + y = 87$
5. $3x^2 + y^2 + x - 2y - 54 = 0$
6. $(x+1)(x-2)(y-4)(y+5) = 0$
7. $x^2 - y^2 = 7$
8. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 1$

Exercice 9 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(2\,;-4)$ et de rayon $r = 10$.

1. Justifier que le point $\mathrm{A}(1\,;-1)$ appartient à $\mathcal{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ passant par A.

Exercice 10 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(1\,;2)$ et de rayon $r = 5$. Soit la droite (AB) avec $\mathrm{A}\,(2\,;10)$ et $\mathrm{B}\,(1\,;-2)$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite D.

Exercice 11 ⋆ [Représenter, Calculer]

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{AC} = \dfrac{7}{3}$ et $\mathrm{BC} = \dfrac{3}{2}$. On note I le milieu de [BC]. Calculer la longueur AI.

Exercice 12 ⋆ [Représenter, Calculer]

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = 7$, $\mathrm{AC} = 4$ et $\mathrm{BC} = 5$. On note I le milieu de [AC]. Calculer la longueur BI.

Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer les trois longueurs des côtés ainsi que la mesure des trois angles du triangle ABC (on arrondira les résultats à 0,1 près.

1. $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{AC} = 7$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 37°$.
2. $\mathrm{AB} = 1$, $\mathrm{AC} = 4$ et $\widehat{\mathrm{ABC}} = 110°$.
3. $\mathrm{BC} = 9$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = 72°$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = 34°$.
4. $\mathrm{BC} = 11$, $\mathrm{AC} = 3$ et $\widehat{\mathrm{ABC}} = 72°$.
5. $\mathrm{AC} = 17$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = 64°$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = 71°$.

Exercice 14 ⋆ [Raisonner, Représenter]

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? « La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est strictement supérieure à la moitié du carré du troisième côté ».

Exercice 15 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soient $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}\,(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}\,(x_\mathrm{C}\,;y_\mathrm{C})$ trois points du plan. On note G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Montrer que les coordonnées de G sont :

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{3}\,;\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{3}\right)$$

2. On considère la fonction algorithmique ci-dessous, nommée **gravite**, et prenant en paramètre les variables xA, xB, xC (abscisses respectives des points A, B et C) ainsi que les variables yA, yB, yC (ordonnées respectives des points A, B et C).

```
1 def gravite(xA,xB,xC,yA,yB,yC):
2     xG=
3     yG=
4     print(xG,yG)
5
6 gravite(1,2,-4,5,2,-3)
```

   (a) Compléter les lignes 2 et 3 de cet algorithme afin qu'il calcule les coordonnées xG et yG du centre de gravité du triangle ABC.

   (b) Quelle valeur renvoie l'algorithme ?

Exercice 16 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer]

On considère les points $\mathrm{A}(3\,;5)$, $\mathrm{B}(-2\,;1)$ et $\mathrm{C}(4\,;7)$. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 17 ⋆⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

Soit A $(x_A\,;y_A)$ un point du plan et D la droite d'équation $ax+by+c=0$. Déterminer la distance du point A à la droite D en fonction des réels x_A, y_A, a, b et c.

Exercice 18 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

Soient A et B deux points du plan tels que AB $=4$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$.

Exercice 19 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

Soient A et B deux points du plan tels que AB $=1$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{3}{2}$.

Exercice 20 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

Soient A et B deux points du plan tels que AB $=5$ cm. Déterminer l'ensemble des points M tels que l'aire de ABM est de 3 cm^3.

Exercice 21 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soient A $(1\,;3)$ et B $(-2\,;5)$. Déterminer l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

Exercice 22 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Soient A et B deux points du plan. Déterminer l'ensemble de(s) point(s) M qui minimise la quantité suivante :

$$\text{MA}^2+\text{MB}^2.$$

Exercice 23 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Chercher, Représenter]

Dans un triangle ABC, on appelle :

- $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit de centre O ;
- G le centre de gravité ;
- H l'orthocentre ;
- A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

1. Faire une figure. Que peut-on conjecturer sur les points O, G et H ? La suite de l'exercice consiste à démontrer cette conjecture.
2. On appelle I le point du plan tel que :
$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$
   (a) Justifier que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{OA'}$.
3. Conclure que I est un point de la hauteur issue de A puis que I = H.
4. On a ainsi montré que :
$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$
   En déduire que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
5. Conclure.

Exercice 24 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Chercher, Représenter]

Soient A $(x_A\,;y_A)$, B $(x_B\,;y_B)$ et C $(x_C\,;y_C)$ trois points du plan. On note :

- A′, B′ et C′ les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
- $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ de centre O'.
- P, Q et R les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur [BC], [AC] et [AB].
- H l'orthocentre du triangle ABC.
- I, J et K les milieux respectifs de [HA], [HB] et [HC].

Montrer que les neufs points A′, B′, C′, P, Q, R, I, J et K appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$.