Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 8
Applications du produit scalaire

Table des matières

Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1 Application à l'étude des droites

Définition 1

Soit D une droite. On appelle vecteur normal à D tout vecteur non nul qui est orthogonal à un vecteur directeur de D.

Remarque.
De la même manière qu'il existe une infinité de vecteurs directeurs d'une droite, il existe aussi une infinité de vecteurs normaux à une droite.

Proposition 1

Soient D et D' deux droites du plan. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) D et D' sont perpendiculaires ;

(ii) Il existe un vecteur directeur de D et un vecteur directeur de D' qui sont orthogonaux ;

(iii) Il existe un vecteur normal à D et un vecteur normal à D' qui sont orthogonaux ;

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Cela découle immédiatement de la définition de deux vecteurs orthogonaux.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ directeur de D et un vecteur $\vec{v}$ directeur de D' tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux. D'après la définition d'un vecteur normal (Définition 1), $\vec{u}$ est un vecteur normal à D'. De même, $\vec{v}$ est normal à D. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, la propriété est vérifiée.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ normal à D et un vecteur $\vec{v}$ normal à D' tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux. Comme $\vec{u}$ est normal à D, il existe un vecteur directeur $\vec{k}$ de D tel que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{k}$. Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{k}$ et à $\vec{v}$. C'est donc que $\vec{k}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et que, par conséquent, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D. De même on montre que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D'. Les droites D et D' ont des vecteurs directeurs orthogonaux et sont donc perpendiculaires.

$\square$

Proposition 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Réciproquement, toute droite ayant pour vecteur normal le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration.
Il suffit de se rappeler qu'un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{u}.\vec{n} = (-b) \times a + a \times b = 0$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. □

Exemple.
Soit D la droite d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ et D' la droite d'équation $6x - 4y + 1 = 0$.
Montrer que les deux droites D et D' sont perpendiculaires.

Solution :
$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D et $\vec{m}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D'.
D'après la Proposition 1, il suffit de montrer que $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont orthogonaux. Or,

$$\vec{n}.\vec{m} = 2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0.$$

2 Application à l'étude des cercles

Définition 2

On appelle cercle de centre Ω et de rayon r, noté $\mathcal{C}_{(\Omega,r)}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega\mathrm{M} = r$.

Proposition 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Une équation du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon r est :

$$\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{(\Omega,r)} &\iff \Omega M = r \\ &\iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \text{(car le repère est orthonormé)} \\ &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ car } r > 0 \end{aligned}$$

□

Méthode – Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini par une équation

- Mettre l'équation sous la forme $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$
- Commencer à factoriser sous la forme $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 + \ldots = 0$
- Simplifier les constantes.

Exemple.
On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x = -3y - 2$.
Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
M(x\,;y) \in \mathcal{C} &\iff x^2+y^2-2x=-3y-2\\
&\iff x^2-2x+y^2+3y+2=0\\
&\iff (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+2-1-\frac{9}{4}=0\\
&\iff (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}=0\\
&\iff (x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=(\frac{\sqrt{5}}{2})^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1\,;-\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Proposition 4

Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration.
Soit $M(x\,;y)$ les coordonnées de M dans un repère orthonormé.

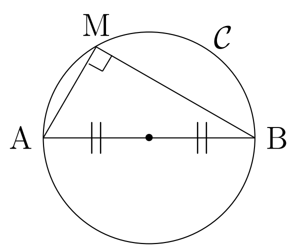
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 &\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0\\
&\iff x^2-x_Ax-x_Bx+x_Ax_B+y^2-y_Ay-y_By+y_Ay_B=0\\
&\iff x^2-(x_A+x_B)x+y^2-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+x_Ax_B+y_Ay_B\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\
&\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

ce qui est bien une équation du cercle de diamètre [AB]. □

Proposition 5

Soient A et B deux points distincts du plan et soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB]. On a alors l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{C} \iff \text{AMB est rectangle en M.}$$



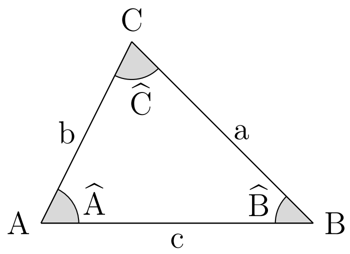
Démonstration.
D'après la Proposition 4,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathcal{C} &\iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \\ &\iff (\mathrm{MA}) \perp (\mathrm{MB}) \\ &\iff \mathrm{AMB} \text{ est rectangle en M.} \end{aligned}$$

□

3 Application à l'étude des triangles

Dans toute cette partie, on utilisera les notations suivantes :
$\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{AC} = b$, $\mathrm{BC} = a$, $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{B}}$.



3.1 Formule d'Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé

Proposition 6

Pour tout triangle ABC,
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\widehat{\mathrm{A}}).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} a^2 = \mathrm{BC}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2 &= \|(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\|^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\widehat{\mathrm{A}}) \end{aligned}$$

(en utilisant la formule trigonométrique du produit scalaire).

□

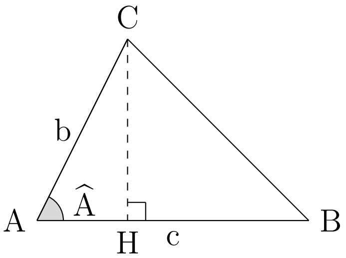
3.2 La loi des sinus

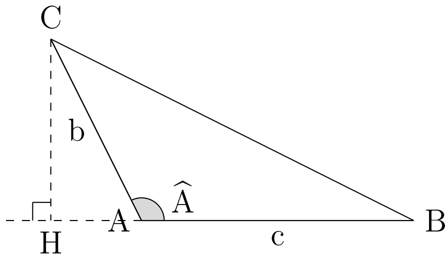
Proposition 7

Pour tout triangle ABC,
$$\frac{a}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \frac{b}{\sin(\widehat{\mathrm{B}})} = \frac{c}{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}.$$

Démonstration.
On décompose la preuve en deux étapes.

- **Étape 1** : on prouve que si $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle ABC, alors $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\mathrm{A}})$.
En fait, on sait que si H est le projeté orthogonal de C sur [AB], alors $\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{HC}$.
Or, si $\widehat{\mathrm{A}}$ est un angle aigu, $\mathrm{HC} = \mathrm{AC}\sin(\widehat{\mathrm{A}})$
et si $\widehat{\mathrm{A}}$ est un angle obtus, $\mathrm{HC} = \mathrm{AC}\sin(\pi - \widehat{\mathrm{A}}) = \mathrm{AC}\sin(\widehat{\mathrm{A}})$ (voir les figures ci-dessous).





Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\mathrm{A}})$.
- **Étape 2** : On en déduit la loi des sinus.
D'après l'étape 1, on peut écrire que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\mathrm{A}})$ mais aussi, par une démonstration similaire, que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{\mathrm{B}})$ et que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{\mathrm{C}})$. Ainsi, ces trois formules permettent d'écrire que
$$\frac{abc}{2\mathcal{S}} = \frac{a}{\sin(\widehat{\mathrm{A}})} = \frac{b}{\sin(\widehat{\mathrm{B}})} = \frac{c}{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}.$$

□

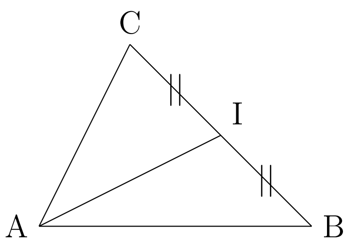
3.3 Médianes et centre de gravité

Définition 3

Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé.

Proposition 8 – (Théorème de la médiane)

Pour tout triangle ABC, si I est le milieu de [BC] alors :
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}.$$



Démonstration.
Pour le démontrer, on fait apparaître le point I en utilisant la relation de Chasles. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}^2 \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.(\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}) + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IC}}^2 \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IC}}^2 \quad (\text{car } \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} = \vec{0}) \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + 2\mathrm{IB}^2 \quad (\text{car IB} = \text{IC}) \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2} \quad (\text{car IB} = \frac{\mathrm{BC}}{2})
\end{aligned}$$

□

Remarque.
En utilisant la même méthode et en faisant apparaître le point I à l'aide de la relation de Chasles, on peut également montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AI}^{\,2} - \frac{\mathrm{BC}^{\,2}}{4} \quad \text{et que} \quad \mathrm{AB}^{\,2} - \mathrm{AC}^{\,2} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

Proposition 9

Pour tout triangle ABC, il existe un unique point G tel que
$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$. Ce point est appelé **centre de gravité** du triangle.

Démonstration.
Soient A, B et C trois points du plan.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0} \\
&\iff 3\,\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0} \\
&\iff -3\,\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&\iff 3\,\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&\iff \text{G est l'image de A par la translation de vecteur } \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.
\end{aligned}$$

Cela prouve donc que G existe et est unique.

□

Proposition 10

- Les médianes d'un triangle sont concourantes (elles se coupent en un même point).
- Leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle.
- Le centre de gravité est situé au deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue.

Démonstration.
On va démontrer les trois points en même temps grâce à un calcul vectoriel.
On note I le milieu de [BC], J le milieu de [AC] et K le milieu de AB.
Comme G est le centre de gravité de ABC, on sait, d'après la preuve de la Proposition 9, que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right)\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \quad (\text{car } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0})
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$ Finalement, du fait de la colinéarité des vecteurs, on voit que G appartient aux trois médianes. C'est donc qu'elles sont concourantes en le point G. Par ailleurs, on a montré que $AG = \frac{2}{3}AI$, que $BG = \frac{2}{3}BJ$ et que $CG = \frac{2}{3}CK$ □

Différentes formules dans le triangle

Nom	Formule	Lien entre :
Formule d'Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$	Un angle et les longueurs des trois côtés
Loi des sinus	$\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})}$	Deux angles et leurs côtés opposés
Théorème de la médiane	$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$	La longueur d'une médiane et les longueurs des trois côtés

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer le centre et le rayon.
- Savoir déterminer l'ensemble des mesures (angles et longueurs) d'un triangle à partir de trois mesures données.
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème de géométrie.

QCM d'entrainement