Produit scalaire – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆			2, 3, 12	4	1, 3, 5, 6, 11	
Exercices ⋆⋆	7		13, 14	10	7, 8, 9, 13, 14	
Exercices ⋆⋆⋆	15, 16	17	15, 16, 18, 19	16	17, 18, 19	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 4$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2 ⋆ [Représenter]

Soit ABCD un carré de centre O. En utilisant uniquement les points A, B, C, D et O, citer cinq produits scalaires nuls.

Exercice 3 ⋆ [Calculer, Représenter]

Dans chaque cas, déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

1. $AB = 2$, $AC = 2$ et $BC = 1$
2. $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{7}$

Exercice 4 ⋆ [Raisonner]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On considère la proposition suivante :
« Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ».

1. La proposition est-elle vraie ou fausse ?
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 5 ⋆ [Calculer]

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.
2. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ à partir de la définition du produit scalaire. Que peut-on dire sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
3. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la formule du produit scalaire avec les coordonnées.

Exercice 6 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, on donne les coodonnées de quatre points A, B, C et D dans un repère orthonormé. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

1. $A(0\,;5)$, $B(-7\,;8)$, $C(1\,;5)$, $D(-3\,;4)$;
2. $A(\sqrt{2}\,;1)$, $B(4\,;\sqrt{3})$, $C(1\,;2)$, $D(-2\,;-\frac{1}{2})$.

Exercice 7 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Dans un repère orthonormé, on considère les six points $A(1;1)$, $B(4;0)$, $C(9;10)$, $D(-2;3)$ et $E(-1;-2)$.

1. Placer les points dans un repère puis conjecturer quelles sont les droites perpendiculaires et les droites parallèles entre elles parmi les droites (AD), (BC) et (AE).
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 8 ⋆⋆ [Calculer]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
Calculer :
$\vec{v}.\vec{u}$, $7\vec{u}.4\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})^2$, $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$.

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- $(2\vec{u}).(5\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2$

Exercice 10 ⋆⋆ [Raisonner]

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Pour tous points A, B, C et D, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$
2. Il existe des points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$
3. Pour tous points A, B, C et D, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$
4. Il existe des points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$
5. Soient A, B, C, D et E cinq points.
   Les points D et E sont confondus si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}$.

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

1. Soient A, B et C trois points tels que $AB = 1$, $AC = 5$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Soient A, B et C trois points tels que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$. Déterminer la valeur de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ sachant qu'il appartient à l'intervalle $[0;\pi]$.

Exercice 12 ⋆ [Représenter, Calculer]

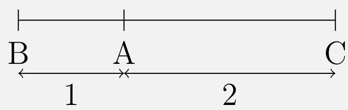
H est le projeté orthogonal de C sur (AB). Dans chaque cas, déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

1. $AB = 5$, $AH = 6$ et $H \in [AB]$.
2. $AB = 2$, $AH = \dfrac{1}{3}$ et $H \notin [AB]$.

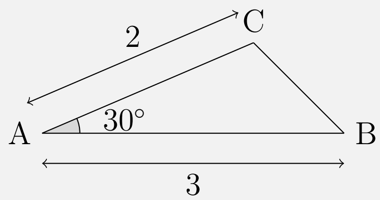
Exercice 13 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Pour chacune des figures ci-dessous, calculer en justifiant la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

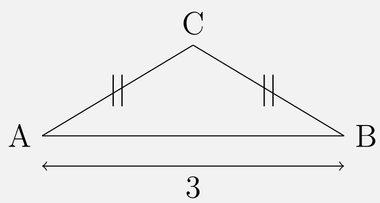
1.



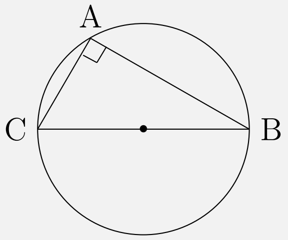
2.



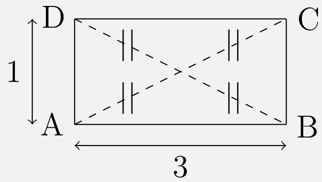
3.



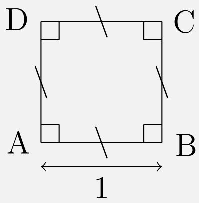
4.



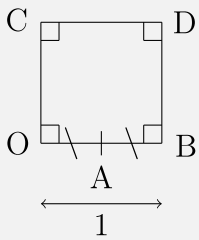
5.



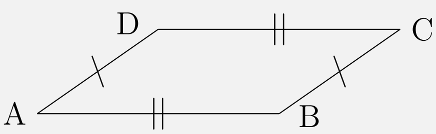
6.



7.



8.



AD=3, AB=4 et AC=6 ;

Exercice 14 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soit ABC un triangle tel que AB $= 7$, AC $= 6$ et BC $= 4$. À l'aide de la calculatrice, déterminer une mesure des trois angles du triangle en degrés (on arrondira les résultats à $0{,}1°$ près).

Exercice 15 ⋆⋆⋆ [Chercher, Représenter]

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [CI]. Démontrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

Exercice 16 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner, Représenter]

1. Montrer que pour tous points du plan A, B, C et D :

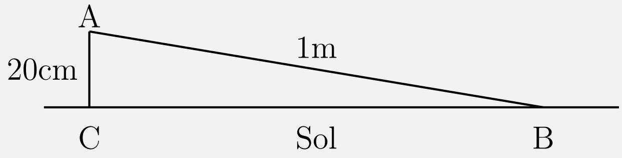
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$$

2. L'objectif de cette question est de montrer que les hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes.
   (a) Soit ABC un triangle quelconque. On note H l'intersection entre la hauteur issue de B et la hauteur issue de C. En utilisant la question 1, montrer que (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
   (b) En déduire que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en H.
   Remarque : Le point d'intersection des hauteurs est appelé **orthocentre** du triangle.

3. Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC tels que A$(1\,;-2)$, B$(4\,;3)$ et C$(-2\,;1)$. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 17 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On dispose d'une planche de 1m de long et d'une bille de masse $m = 100$g. A l'aide d'une cale de 20cm, on place la planche de manière à former un plan incliné comme sur le dessin ci-dessous.



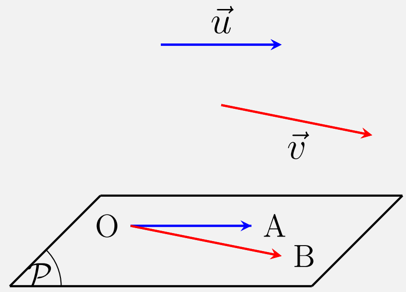
On lache la bille depuis le point A et on la laisse rouler sur le plan incliné. On néglige les forces de frottements et on rapelle que si $\vec{j}$ est le vecteur vertical, dirigé vers le haut et de norme 1, le poids de la bille est $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\vec{j}$ avec $g = 9,8$m.s^{-2}.
Le travail du poids de la bille sur le trajet [AB] est défini, en Joule, par la formule suivante :

$$\mathrm{W} = \overrightarrow{\mathrm{P}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

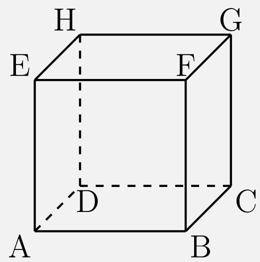
1. Déterminer le travail du poids de la bille sur le trajet [AB].
2. On admet que $\mathrm{W} = \dfrac{1}{2}mv^2$ où v est la vitesse de la bille en arrivant au sol (au point B). Calculer v.
3. On dispose d'une autre planche d'une longueur de 2m. Si on forme un plan incliné avec la même cale de 20cm, quelle sera la vitesse de la bille en arrivant au sol. Interpréter le résultat.

Exercice 18 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer]

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on définit le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de la façon suivante :
On considère O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par les points O, A et B (il existe toujours). Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est défini comme étant égal au produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ dans le plan $\mathcal{P}$.



On considère un carré ABCDEFGH dont l'arête a pour longueur x.



1. Calculer les produits scalaires suivants en fonction de x.
   (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
   (b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
   (c) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
   (d) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{AG}}$
2. (a) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AG}}.\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ en fonction de x.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AG}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right)$ formé par les grandes diagonales du cube.

Exercice 19 ⋆ ⋆ ⋆
[Représenter, Calculer]

Sur le dessin ci-dessous, la largeur de la cage de football est AB=7,32 mètres. Les points A, B et D sont alignés. On appelle T le point où se trouve le ballon. Le triangle TAD est rectangle en D et on sait par ailleurs que AD=9m et que TD=18m.

1. Pourquoi $\overrightarrow{TD}.\overrightarrow{DB} = 0$?
2. Démontrer que $\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB} = 470{,}88$
3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir, c'est-à-dire de l'angle $\widehat{ATB}$.