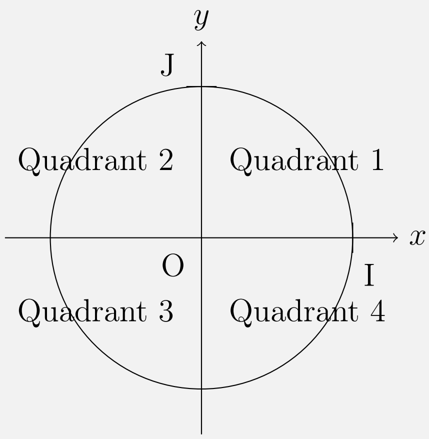
Trigonométrie – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★	8	28, 29	1, 2, 4, 11, 13, 15, 16, 19, 22		3, 5, 6, 15, 16, 17, 19, 21	
Exercices ★★	9, 18	12	7, 10, 20, 23	13	10, 18, 20, 26	
Exercices ★★★	27	30	25		24, 25	

Exercice 1 ★ [Représenter]

Pour chacun des réels suivants, dire dans quel quadrant il se trouvera lors de l'enroulement de la droite numérique.



- $\dfrac{\pi}{5}$
- $-\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{8\pi}{9}$
- $\dfrac{7\pi}{3}$
- $\dfrac{-11\pi}{6}$
- $\dfrac{-7\pi}{300}$

Exercice 2 ★ [Représenter]

Tracer le cercle trigonométrique et placer le plus précisément possible les points images des réels suivants :

- $\dfrac{\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{\pi}{6}$
- $-\dfrac{\pi}{6}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $\dfrac{7\pi}{6}$
- $\dfrac{-2\pi}{3}$
- $\dfrac{-4\pi}{3}$

Exercice 3 ★ [Calculer]

Pour chacun des nombres suivants, déterminer deux autres réels ayant le même point image lors de l'enroulement de la droite numérique.

- π
- $\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $-\dfrac{\pi}{7}$
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $\dfrac{7\pi}{10}$

Exercice 4 ⋆ [Représenter]

Déterminer la mesure en radian de tous les angles d'un triangle équilatéral et d'un triangle isocèle rectangle.

Exercice 5 ⋆ [Calculer]

1. Convertir les angles suivants en degré :
   - $\dfrac{\pi}{4}$ rad
   - 1 rad
   - $\dfrac{\pi}{5}$ rad
   - $\dfrac{5\pi}{60}$ rad
   - $\dfrac{3\pi}{7}$ rad
   - $\dfrac{\pi}{12}$ rad
2. Convertir les angles suivants en radian :
   - $30°$
   - $1°$
   - $60°$
   - $150°$
   - $50°$
   - $430°$

Exercice 6 ⋆ [Calculer]

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

- $\dfrac{7\pi}{4}$
- $-\dfrac{33\pi}{12}$
- $\dfrac{22\pi}{5}$
- $\dfrac{236\pi}{3}$
- $-\dfrac{\pi}{7}$
- $-\dfrac{151\pi}{6}$

Exercice 7 ⋆⋆ [Représenter]

Écrire une fonction algorithmique en langage Python prenant en entrée la mesure d'un angle et renvoyant, en sortie, la mesure principale de cet angle. Implémenter cet algorithme puis le tester pour quelques valeurs.

Exercice 8 ⋆ [Chercher]

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et on note O le centre du triangle. Déterminer la mesure en radian des angles orientés suivants :

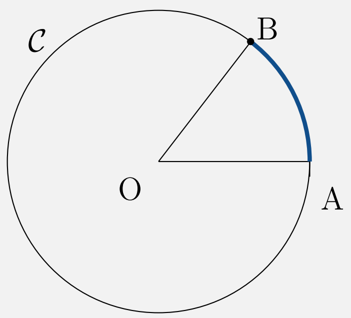
- $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AO})$
- $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$
- $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AO})$
- $(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{CO})$

Exercice 9 ⋆⋆ [Chercher]

On considère un pentagone régulier ABCDE de sens direct et on note O le centre du pentagone.
Déterminer la mesure en radian et en degré de l'angle $\widehat{AOB}$ puis de l'angle $\widehat{CBA}$.

Exercice 10 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Sur la figure ci-dessous, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon OA = 3. On sait de plus que $\widehat{AOB} = 57°$. Déterminer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$. Arrondir le résutat à 10^{-2} près.



Exercice 11 ⋆ [Représenter]

Si l'on représentait une boussole par un cercle trigonométrique, à quel angle radian correspondrait la position Sud-Ouest ?

Exercice 12 ⋆⋆ [Modéliser]

Une minute d'arc est une unité de mesure des angles égale à un soixantième de degré. On a donc :

$$1' \text{ (minute d'arc) } = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

1. Déterminer la mesure en radian d'un angle d'une minute d'arc.
2. Le mille marin est défini comme la distance à parcourir à la surface de la Terre correspondant à un arc de cercle d'une minute d'arc.
   En conisdérant la Terre comme une sphère de rayon $R = 6370$km, calculer la longueur d'un mille marin en mètre. Arrondir le résultat à 10 mètres près.

Exercice 13 ⋆ [Représenter]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{5}$. Déterminer les mesures des angles orientés suivants :

- $(\vec{v}\,;\vec{u})$
- $(-\vec{u}\,;\vec{v})$
- $(-\vec{u}\,;-\vec{v})$
- $(-\vec{v}\,;\vec{u})$
- $(-\vec{v}\,;-\vec{u})$

Exercice 14 ⋆⋆ [Raisonner]

Pour chaque question, indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Énoncer ensuite la réciproque de la proposition et indiquer si la réciproque est vraie ou fausse.

1. Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Si $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\vec{u})$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
3. Soient $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs. Si $\vec{u_1}$ et $\vec{v_1}$ sont colinéaires et $\vec{u_2}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires, alors $(\vec{u_1}\,;\vec{v_1}) = (\vec{u_2}\,;\vec{v_2})$.

Exercice 15 ⋆ [Calculer, Représenter]

Dans chaque question, le triangle ABC est rectangle en A. Dans chaque cas, déterminer à l'aide de la calculatrice la mesure des trois angles du triangle. On arrondira à 0,1° près.

1. $AB = 5\,\text{cm}$ et $BC = 7\,\text{cm}$
2. $AB = 2\,\text{cm}$ et $AC = 2\,\text{cm}$
3. $AC = 2\,\text{cm}$ et $BC = 4\,\text{cm}$

Exercice 16 ⋆ [Calculer, Représenter]

Dans chaque question, le triangle KLM est rectangle en K. dans chaque cas, déterminer à l'aide de la calculatrice la longueur des trois côtés du triangle. On arrondira à 0,1 cm près.

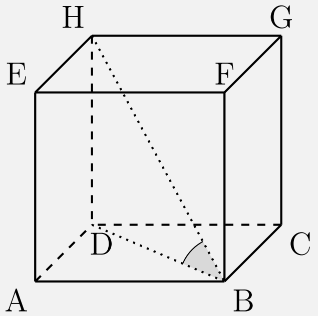
1. $KL = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{KLM} = 25°$
2. $KL = 3\,\text{cm}$ et $\widehat{KLM} = 37°$
3. $LM = 10\,\text{cm}$ et $\widehat{KML} = 41°$

Exercice 17 ⋆ [Calculer]

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}$. Déterminer la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$.

Exercice 18 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

On considère le cube ABCDEFGH de côté AB = 4 représenté ci-dessous.



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{DBH}$ en degrés (arrondir à 0,1° près).
2. Si la longueur du côté est différent de 4, la mesure de l'angle $\widehat{DBH}$ sera t-elle la même ?

Exercice 20 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

- $\dfrac{7\pi}{2}$
- $-\dfrac{5\pi}{4}$
- $\dfrac{5\pi}{3}$
- $-\dfrac{5\pi}{6}$
- 11π
- -102π
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $\dfrac{37\pi}{6}$
- $-\dfrac{101\pi}{3}$
- $\dfrac{131\pi}{6}$

Exercice 19 ⋆ [Calculer, Représenter]

Déterminer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

- $\dfrac{\pi}{2}$
- $\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{\pi}{6}$
- $-\dfrac{\pi}{6}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $\dfrac{5\pi}{6}$
- $\dfrac{7\pi}{6}$
- $\dfrac{-2\pi}{3}$
- $\dfrac{-4\pi}{3}$

Exercice 21 ⋆ [Calculer]

Calculer et simplifier les expressions suivantes.

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
2. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)}$
3. $\dfrac{\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)}{1+\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)}$
4. $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
5. $\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Exercice 22 ⋆ [Représenter]

Dans chaque cas, déterminer un nombre réel x vérifiant l'égalité demandée :

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x) = -1$
4. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Exercice 23 ⋆⋆ [Représenter]

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
3. $\sin(x) = 0$
4. $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos(x) = 5.$
7. $\cos(5x) = -1.$

Exercice 24 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) + 13\cos(x) = 0$
2. $\sin^2(3x) + (2 - \sqrt{2})\sin(3x) = 2\sqrt{2}$
3. $3\cos^2(5x) - \sin^2(5x) = 2$
4. $4\sin^3(x) - 4\sin^2(x) = 3\sin(x) - 3$

Exercice 25 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer]

Résoudre chacune des équations sur l'intervalle I indiqué.

1. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   sur $\mathrm{I} = [-2\pi\,;2\pi]$
2. $\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   sur $\mathrm{I} = [0\,;2\pi]$
3. $\cos(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   sur $\mathrm{I} = \left[\frac{3\pi}{2}\,;\frac{7\pi}{2}\right]$
4. $\sin(7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   sur $\mathrm{I} = \left[-\frac{5\pi}{2}\,;0\right]$

Exercice 26 ⋆⋆ [Calculer]

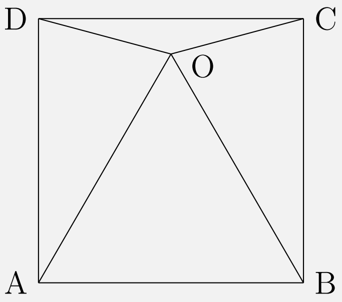
Dans cet exercice, on admettra que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

1. (a) Appliquer cette formule pour $x = \frac{\pi}{12}$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En utilisant la même méthode, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 27 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

1. Dans l'exercice précédent, on a montré que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. En déduire que :
$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}.$$
2. Déterminer la mesure en radian de tous les angles de la figure ci-dessous sachant que ABCD est un carré et que ABO est un triangle équilatéral.



Indication : pour l'angle $\widehat{DCO}$, on pourra commencer par calculer la tangente de cet angle.

Exercice 28 ⋆ [Modéliser]

Une échelle de 4 mètres est appuyée contre un mur. Par mesure de sécurité, on estime que l'angle que fait l'échelle avec le sol doit être environ de 75°. Quelle doit être la distance entre les pieds de l'échelle et le mur ?

Exercice 29 ⋆ [Modéliser]

On représente la Terre par un point T, la Lune par un point L et le Soleil par un point S. On dit que la Lune est visible en quadrature lorsqu'exactement la moitié du disque lunaire est visible depuis la Terre. On parle de premier quartier de lune et de dernier quartier de lune. Autrement dit, cela se produit lorsque $\widehat{SLT} = 90°$. On observe par ailleurs depuis la Terre que $\widehat{LTS} = 89{,}853°$.

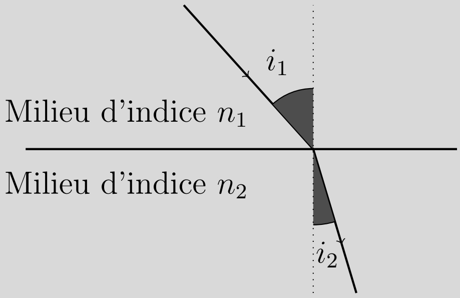
Calculer le rapport $\frac{TS}{TL}$ puis interpréter le résultat par une phrase.

Exercice 30 ⋆⋆⋆ [Modéliser]

On souhaite mesurer l'indice de réfraction n d'un échantillon d'huile de silicone à l'aide d'un réfractomètre.

Rappel de physique

Lorsqu'un rayon issu d'un milieu d'indice n_1 se réfracte, dans un milieu d'indice n_2 en formant des angles respectivement i_1 et i_2 avec la normale au dioptre, alors ils sont liés par la formule $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.



Le principe est le suivant : on dispose une goutte du liquide à tester (en bleu sur le dessin) sur un prisme en verre. Vu du dessus, le prisme peut être considéré comme un triangle dont les angles sont $\widehat{CAB} = 35°$, $\widehat{ABC} = 80°$ et $\widehat{BCA} = 65°$. On éclaire la goutte avec une incidence rasante, c'est-à-dire telle que $i_1 = 90°$. Le rayon lumineux subit alors deux réfraction successives : lorsqu'il traverse la paroi [AB] puis lorsqu'il traverse la paroi [BC]. Les lois de la réfraction montrent que $n \sin(i_1) = n' \sin(i_2)$ et $n' \sin(i_3) = n'' \sin(i_4)$, où $n' = 1{,}53$ est l'indice de réfraction du verre composant le prisme, $n'' = 1{,}00$ l'indice de réfraction de l'air et i_1, i_2, i_3, i_4 les angles représentés sur la figure ci-jointe.
Le réfractomètre a permis de mesurer que, pour l'échantillon considéré, $i_4 = 9{,}3°$.

1. Calculer la valeur de i_3 arrondie à $0{,}1°$ près.
2. (a) Justifier que $\widehat{ABC} = i_2 + i_3$.
   (b) Calculer une valeur de i_2 arrondie à $0{,}1°$ près.
   (c) En déduire la valeur de n arrondie au millième.
3. En théorie, l'huile de silicone a un indice de réfraction de 1,52. On considère que l'huile est pur lorsque son indice de réfraction diffère de moins de 5% de l'indice théorique. L'échantillon testé est-il pur ?