Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 6
Trigonométrie

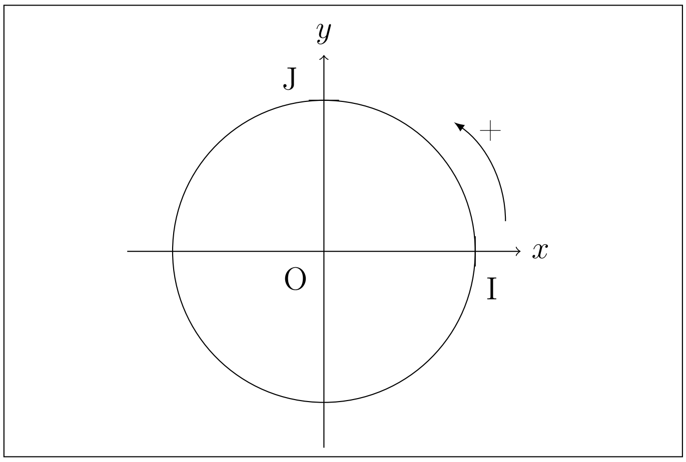
Table des matières

1 Cercle trigonométrique et repérage d'un point

1.1 Cercle trigonométrique

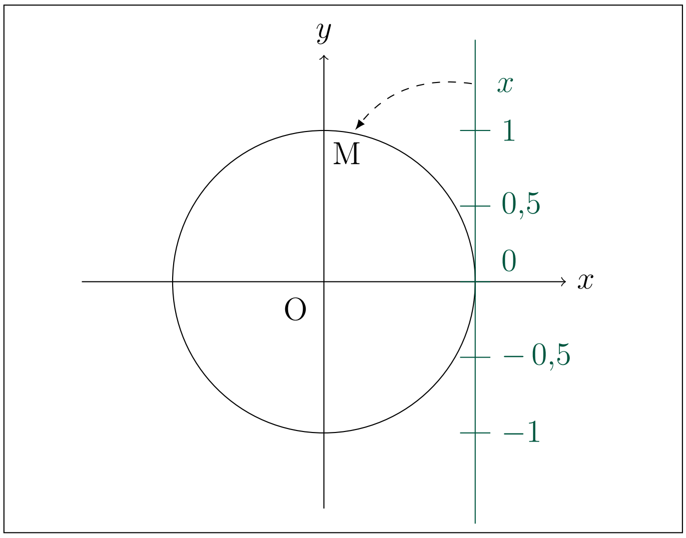
Définition 1

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé **sens direct** ou encore **sens trigonométrique**.



1.2 Repérage sur le cercle trigonométrique

Remarque.
On place la droite numérique perpendiculaire à (OI) telle que le 0 de la droite numérique coïncide avec le point I et on l'oriente dans le sens de O vers J (vers le haut). On enroule la demi-droite des réels positifs sur le cercle $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique et la demi-droite des réels négatifs sur le cercle $\mathcal{C}$ dans le sens indirect.



Définition 2

À chaque nombre réel x de la droite numérique, on associe un unique point M du cercle trigonométrique que l'on appelle **point image** de x.

Proposition 1

Deux nombres réels x_1 et x_2 ont le même point image sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x_2 = x_1 + k \times 2\pi.$$

Démonstration.
Soit M un point du cercle trigonométrique. Les nombres réels ayant pour point image M sont obtenus en parcourant l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$ ainsi qu'un certain nombre de fois le cercle trigonométrique. La propriété découle alors directement du fait que le périmètre du cercle est 2π. □

2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Angle en radian sur le cercle trigonométrique

Définition 3

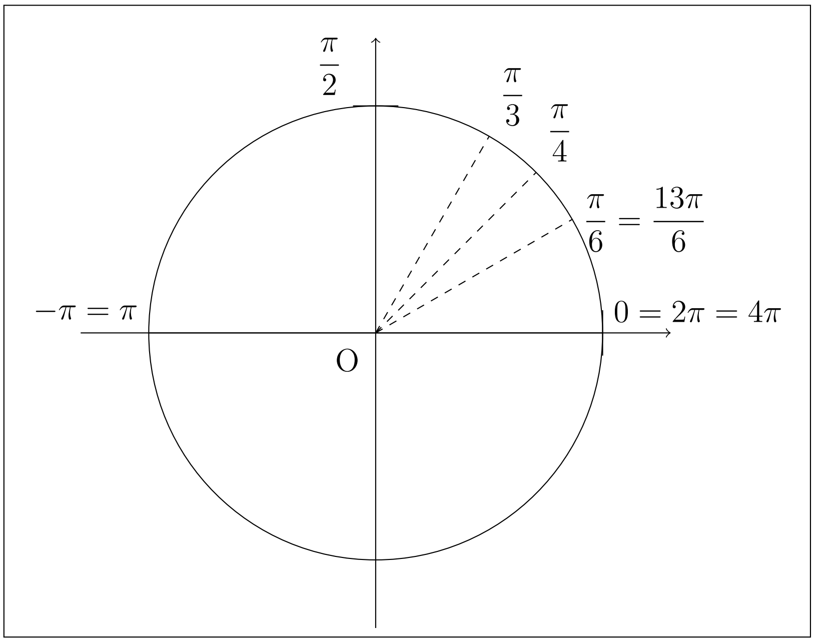
Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ et M et N deux points de $\mathcal{C}$.

- Une mesure de l'angle au centre $\widehat{\mathrm{MON}}$ est donnée par la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$.
- Si x est une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{MON}}$, l'ensemble des mesures de $\widehat{\mathrm{MON}}$ est donné par :

$$x + k \times 2\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Remarque.

- La mesure d'un angle n'est pas unique. L'ensemble des mesures diffèrent de multiples de 2π.
- Le radian est noté rad. Lorsque la mesure d'un angle en radian est un multiple ou une fraction de π, on peut omettre la notation rad.



Méthode – Déterminer la mesure d'un angle en radian

On utilise la proportionnalité d'un angle en radian et en degré ($180° = \pi$ rad).

Exemple. Compléter le tableau suivant en donnant l'une des mesures de l'angle :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian						π		

Solution :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π

2.2 Mesure principale d'un angle

Définition 4

Parmi toutes les mesures d'un angle, la mesure principale est celle qui appartient à $]-\pi;\pi]$.

Méthode – Déterminer la mesure principale d'un angle

- Si la mesure de l'angle est déjà dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, alors c'est la mesure principale.
- Si la mesure est strictement supérieure à π, on soustrait 2π autant de fois que nécessaire pour obtenir une mesure dans $]-\pi;\pi]$.
- Si la mesure est inférieure ou égale à $-\pi$, on ajoute 2π autant de fois que nécessaire pour obtenir une mesure dans $]-\pi;\pi]$.

Exemple.

On considère un angle de mesure $\dfrac{29\pi}{6}$. Quelle est la mesure principale de cet angle ?

Solution :

$\frac{29\pi}{6}$ n'est pas la mesure principale car $\frac{29\pi}{6} \notin]-\pi;\pi]$.

On soustrait 2π :

$\frac{29\pi}{6} - 2\pi = \frac{29\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$.

Mais $\frac{17\pi}{6} \notin]-\pi;\pi]$.

On soustrait donc de nouveau 2π.

$\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Comme $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$, la mesure principale de l'angle est de $\frac{5\pi}{6}$.

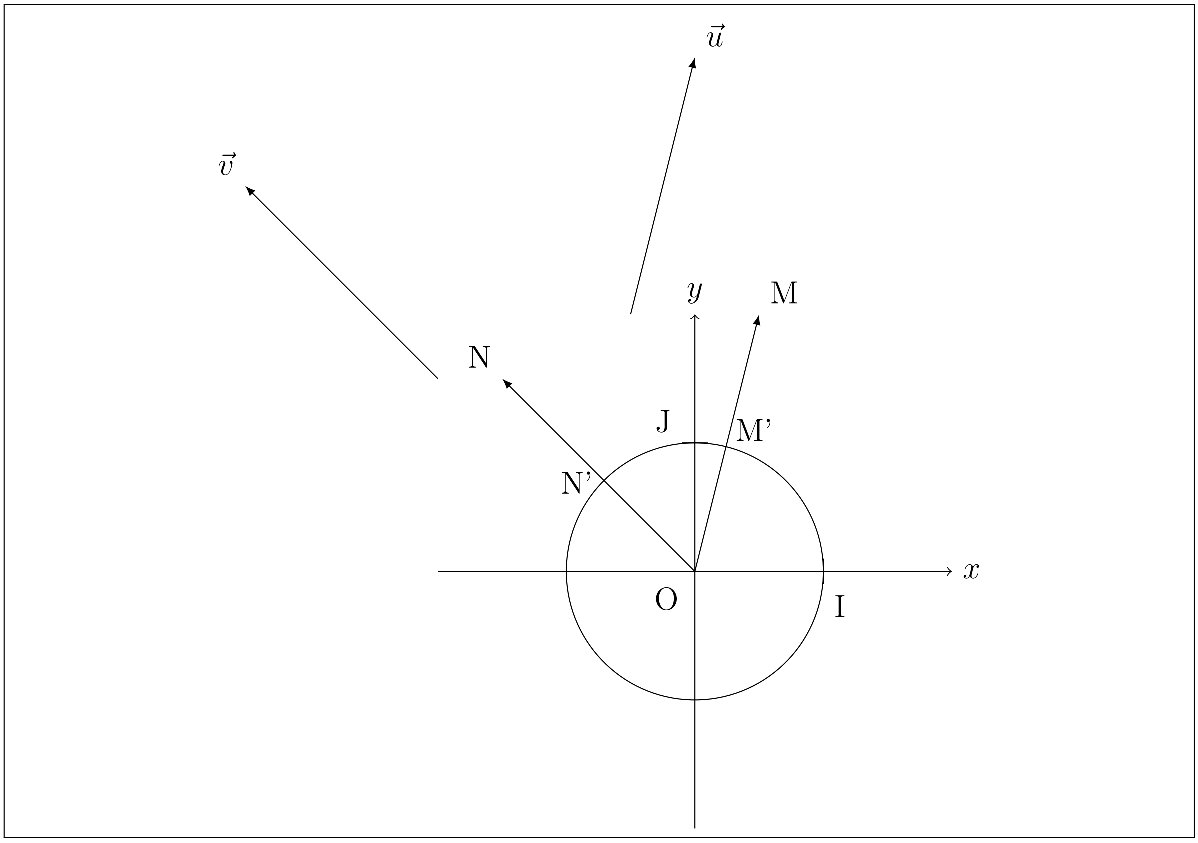
2.3 Angle orienté entre deux vecteurs

Définition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ sont les représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine O. Soient M' et N' les points d'intersection des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique. Une mesure de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, est définie comme étant une mesure de l'angle au centre $\widehat{\mathrm{M'ON'}}$.

Remarque.

- Si M est le point image du réel x, alors $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = x$.
- Tout comme les angles définis sur le cercle trigonométrique, un angle orienté entre deux vecteurs a une infinité de mesures différentes.

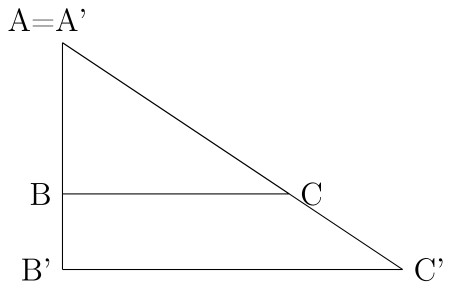


3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

3.1 Rappel : cosinus et sinus dans un triangle rectangle

Introduction de la notion de cosinus

On considère deux triangles ABC et A'B'C' qui sont rectangles respectivement en B et en B' et tels que $\widehat{\text{B'A'C'}} = \widehat{\text{BAC}}$. Quitte à effectuer un déplacement de ces triangles, on peut les disposer comme sur le dessin ci-dessous.



D'après le théorème de Thalès, on voit alors que

$$\frac{\text{AB}}{\text{AB'}} = \frac{\text{AC}}{\text{AC'}}.$$

Par conséquent, AB × AC' = AB' × AC

Donc $\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{AB'}}{\text{AC'}}$.

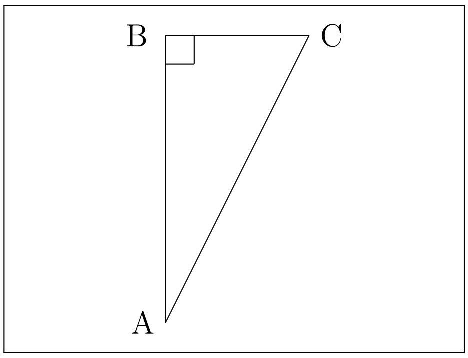
Finalement, cela signifie que la quantité $\frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypothénuse}}$ est la même pour les deux triangles. Par suite, cette quantité serait également la même pour tous les triangles rectangles ayant un angle égal à $\widehat{\text{BAC}}$.

On note $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$ cette quantité.

Définition 6

Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

- $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}$
- $\sin\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \frac{\text{BC}}{\text{AC}}$
- $\tan\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \frac{\text{BC}}{\text{AB}}$



Proposition 2

Dans un triangle ABC rectangle en B :

$$\tan(\widehat{\mathrm{BAC}}) = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})}{\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})}.$$

Démonstration.
On considère un triangle ABC rectangle en B. On a alors :

$$\frac{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})}{\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})} = \frac{\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}}{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \tan(\widehat{\mathrm{BAC}})$$

□

Proposition 3

Dans un triangle ABC rectangle en B :

$$\left(\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})\right)^2 + \left(\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})\right)^2 = 1.$$

Remarque.
En général, on note $\sin^2(\widehat{\mathrm{BAC}}) + \cos^2(\widehat{\mathrm{BAC}}) = 1$.

Démonstration.
On considère un triangle ABC rectangle en B. On a alors :

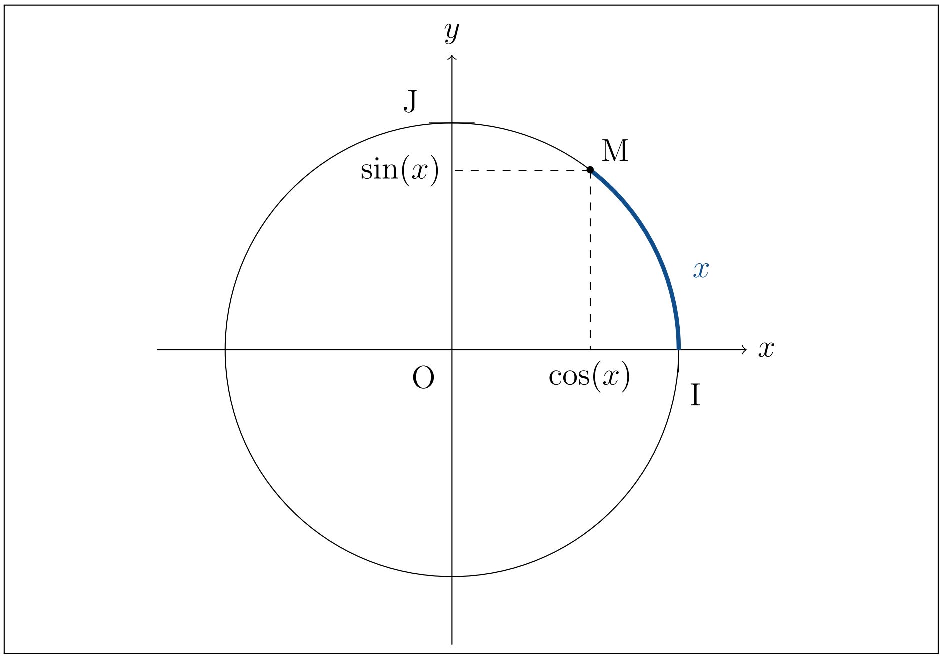
$$\begin{aligned}
(\sin(\widehat{\mathrm{BAC}}))^2 + (\cos(\widehat{\mathrm{BAC}}))^2 &= \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}^2} + \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} \\
&= \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} \\
&= \frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AC}^2} \quad \text{(car d'après Pythagore, } \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2\text{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

3.2 Définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point image de x sur le cercle trigonométrique.
- L'abscisse du point M est appelée cosinus de x. On la note $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point M est appelée sinus de x. On la note $\sin(x)$.



Remarque.
Cette définition généralise la notion de cosinus et de sinus car, dans le cas d'un angle aigu, les définitions 6 et 7 coïncident.
En effet, si on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, on obtient, dans le triangle rectangle OHM :

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{HOM}}\right) = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \mathrm{OH} \quad (\text{car } \mathrm{OM} = 1).$$

Proposition 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

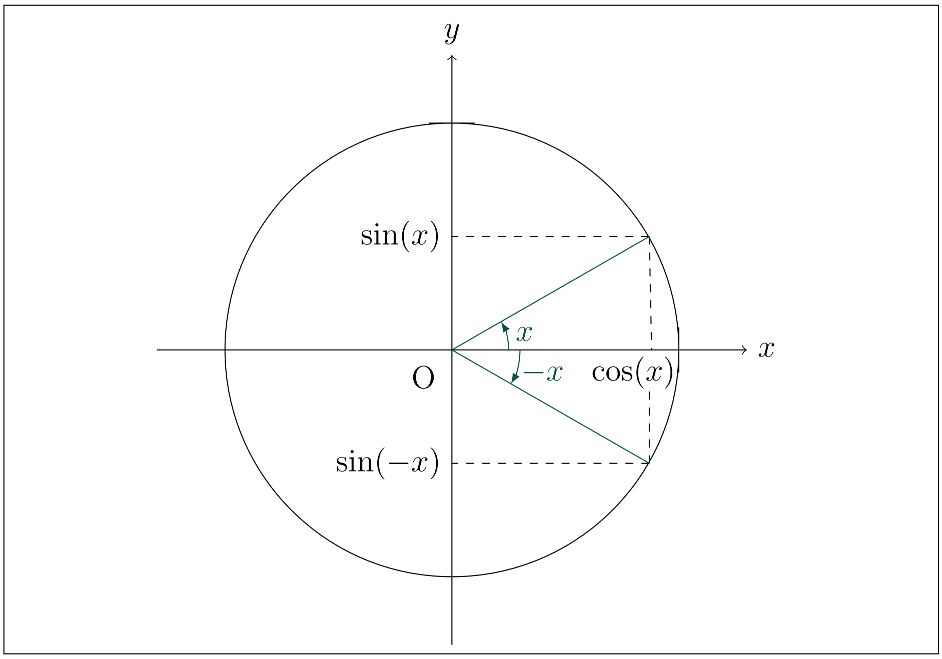
Démonstration.
Les deux premiers points découlent directement du fait que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les abscisses et ordonnées d'un point du cercle trigonométrique (de rayon 1). Le dernier point est une conséquence immédiate de la propriété 3. □

3.3 Formules des angles associés

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

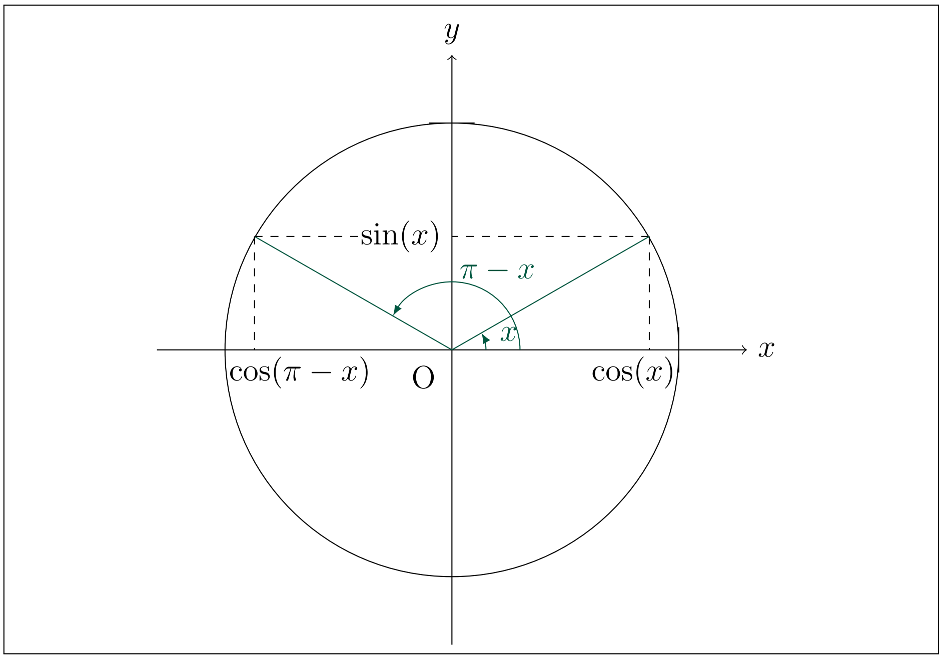
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$



Proposition 6

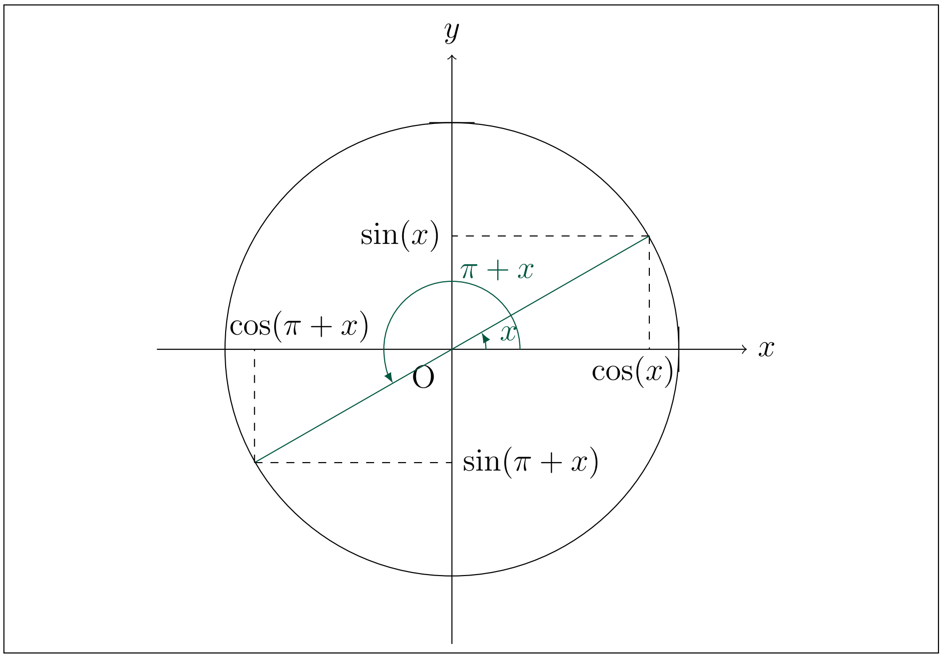
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$



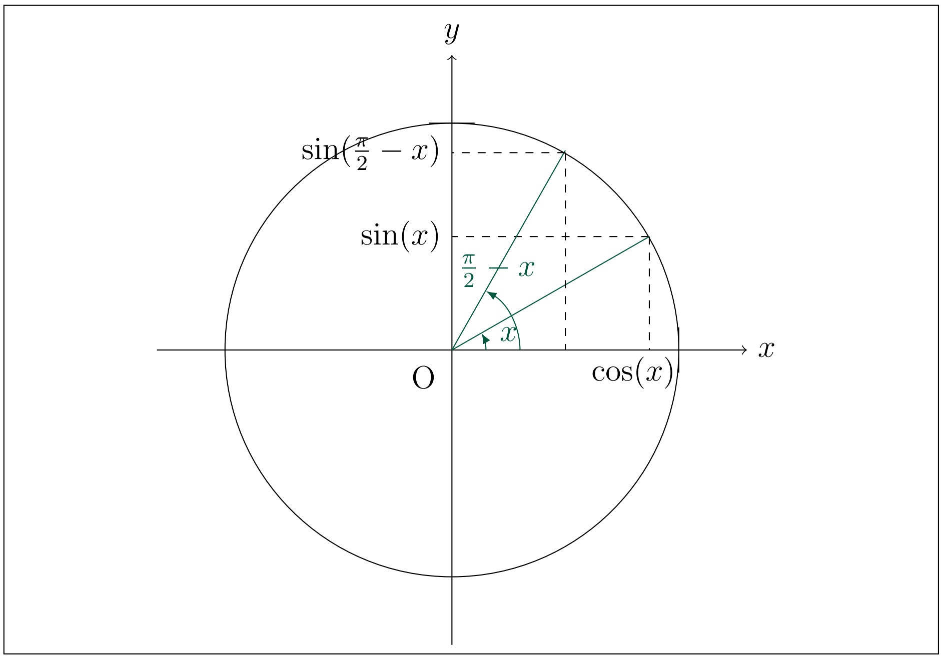
Proposition 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$



Proposition 8

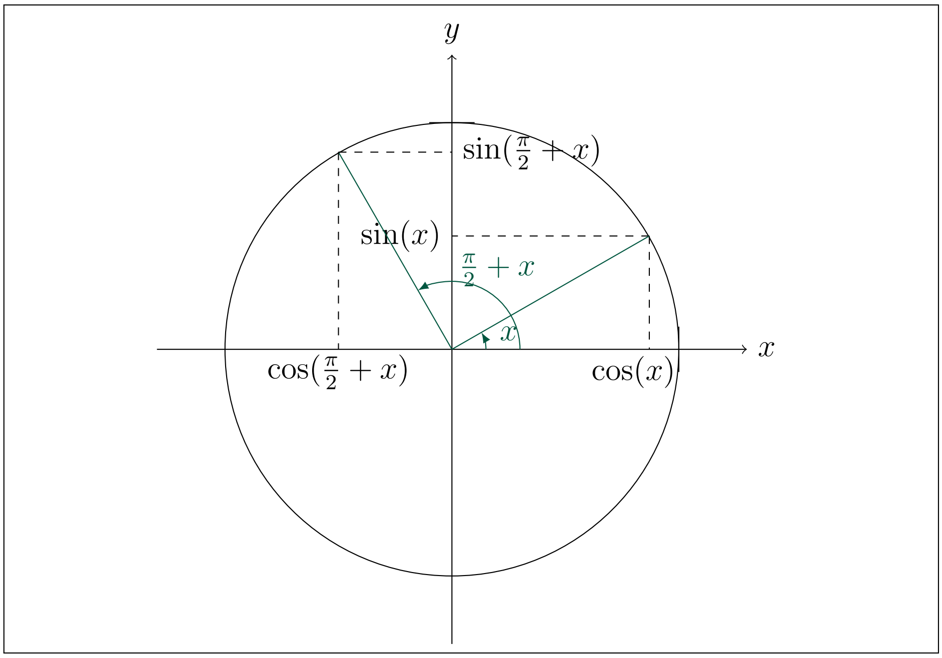
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$



Proposition 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$



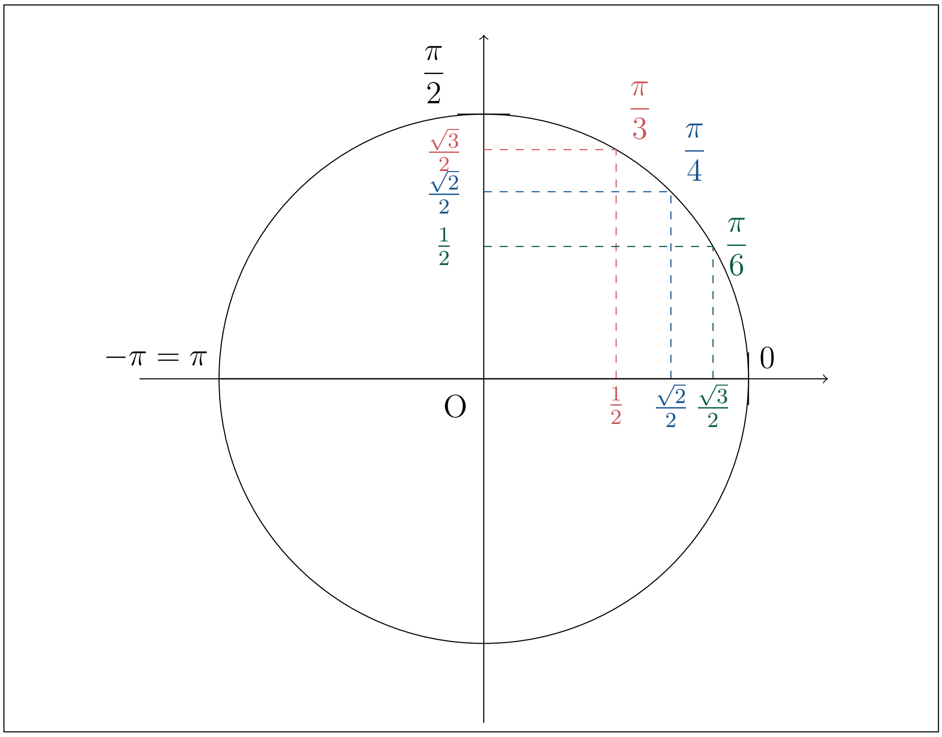
Remarque.
Les propriétés des angles associés (propriétés ci-dessus) ne sont pas à connaître par coeur mais doivent pouvoir être retrouvées très rapidement en faisant un dessin.

3.4 Valeurs remarquables

Les valeurs ci-dessous sont à connaître :

Proposition 10

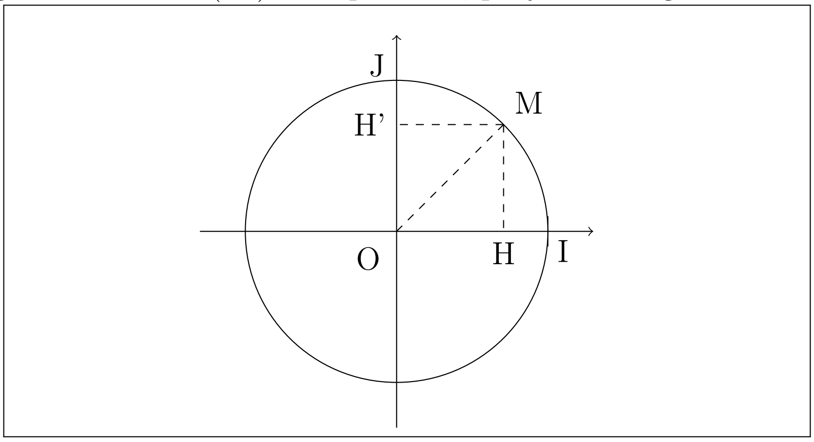
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstration.

- Les valeurs de $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\cos(\pi)$, $\sin(\pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2})$ et $\sin(\frac{\pi}{2})$ se lisent directement sur le cercle trigonométrique.

- Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
  On considère le point M sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{\text{IOM}} = \frac{\pi}{4}$ puis le point H, projeté orthogonal de M sur (OI) et le point H', projeté orthogonal de M sur (OJ).



La somme des angles d'un triangle est égale à π rad donc, dans le triangle OMH,

$$\widehat{\text{OMH}} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, le triangle OMH a deux angles égaux donc il est isocèle et donc OH=HM.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans OHM :

$$\begin{aligned} \text{OM}^2 &= \text{HM}^2 + \text{OH}^2 \\ &= 2\text{OH}^2 \text{ (car OH=HM)} \\ \text{donc} \quad \text{OM} &= \sqrt{2} \times \text{OH} \end{aligned}$$

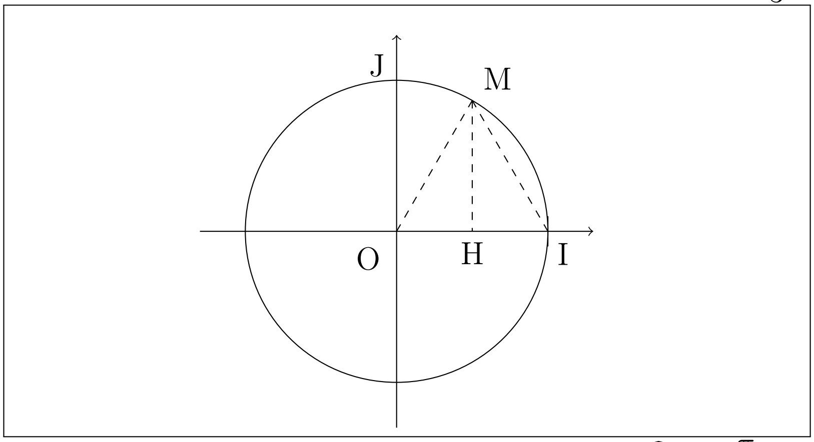
Finalement, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{OH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} OM \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (car OM=1)} \\ &= \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Par définition du cosinus d'un angle, on voit que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Enfin, sachant que OHMH' est un carré, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{OH'} = \text{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
  On considère le point M sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{\text{IOM}} = \frac{\pi}{3}$.



  Comme OM=OI=1, le triangle IOM est isocèle puis comme $\widehat{\text{IOM}} = \frac{\pi}{3}$, on en déduit que IOM est équilatéral.
  On considère le point H, projeté orthogonal de M sur (OI). Comme les médiatrices et les hauteurs d'un triangle équilatéral sont confondues, on en déduit que (HM) est la médiatrice de $[OI]$ et donc que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{OH} = \frac{1}{2}$$

  Ensuite, en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM, on obtient :

$$\text{OM}^2 = \text{OH}^2 + \text{HM}^2$$

  Par conséquent :

$$\begin{aligned}\text{HM} &= \sqrt{\text{OM}^2 - \text{OH}^2} \quad \text{car HM} > 0\\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

- Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
  En fait, $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$.
  On déduit donc les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ à l'aide des Propositions 8 et 9.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Méthode – Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel

- Faire un dessin : placer l'angle en question sur le cercle.
- Extraire du tableau ci-dessus les valeurs dont l'angle a le même dénominateur que celui considéré.
- Utiliser les formules des angles associées pour relier le cosinus ou le sinus recherché avec les valeurs du tableau.

Exemple.

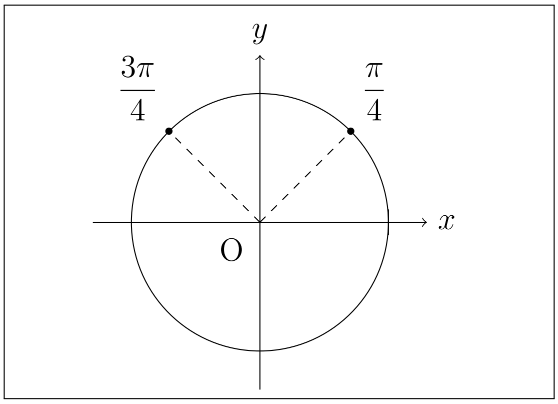
Déterminer $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Solution :

On sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le dessin ci-contre, on en déduit que :

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Convertir des degrés en radians et inversement.
- Déterminer la mesure principale d'un angle.
- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel.