

Variables aléatoires – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		2, 3, 5			1, 2, 3, 5	
Exercices ★★		4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17	6, 11		4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17	
Exercices ★★★	13, 14, 15, 16	13, 15, 16	12, 16		12, 13, 14	

Exercice 1 ★ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

1.

x_i	1	3	5	12
$P(X = x_i)$	0,2	0,65	0,07	0,08

2.

Valeur	-2	-1	0	3	7
Proba.	0,12	0,3	0,28	0,1	0,1

Exercice 2 ★ [Calculer, Modéliser]

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 5 € si on tire une figure et on perd 4 € sinon. Quelle est l'espérance de ce jeu ?

Exercice 3 ★ [Calculer, Modéliser]

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 20 € si on tire l'as de cœur, 10 € pour un autre as, 5 € pour un roi et on perd 3 € sinon. Quelle est l'espérance de ce jeu ?

Exercice 4 ★★ [Calculer, Modéliser]

Une association caritative organise un jeu afin de récolter de l'argent. Chaque personne qui joue doit payer 2 €. Elle tire alors deux cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes. Elle gagne à la condition de tirer le roi et la dame de la même couleur. Quelle peut être la valeur du gain si l'association veut récolter, en moyenne, un euro par partie jouée ?

Exercice 5 ★ [Calculer, Modéliser]

On lance un dé équilibré à six faces et on note X l'inverse du résultat obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$.

Exercice 6 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

On lance deux dés équilibrés à six faces et on note S la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

- Déterminer la loi de probabilité de S puis calculer $E(S)$.
- Écrire un algorithme en langage Python (utiliser la fonction **randint**) permettant de vérifier ce résultat expérimentalement.

Exercice 7 ★★ [Calculer, Modéliser]

Un parc d'attractions propose une carte d'entrée pour la journée au prix de 30 euros. Cette carte donne accès à des attractions avec un prix unique de 2 euros par attraction (en plus des 30 euros payés initialement). Une étude statistique a permis d'obtenir le tableau suivant :

Nbre d'attractions	2	3	4	5	6
Clients (en %)	10	25	35	25	5

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'attractions choisies par un visiteur pris au hasard.

On note S la variable aléatoire donnant la somme totale qu'il dépense.

- Quelle relation lie X et S ?
- Calculer $E(X)$ et en déduire $E(S)$? Interpréter le résultat trouvé en faisant une phrase en français.
- Calculer $V(X)$ et en déduire $V(S)$.
- Le parc a des frais d'organisation qui s'élèvent en moyenne à 30 euros par client. Avec 200 visiteurs par jour, quel gain peut espérer en moyenne le gérant sur un an en ouvrant le parc 365 jours ?

Exercice 8 ★★ [Calculer, Modéliser]

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée. Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

- Pour le trajet de Paris à Orléans, 30% d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.
- Pour le trajet d'Orléans à Limoges :
 - parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40% prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ;
 - parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45% prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute.

On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant, en journée classée rouge, le trajet Paris – Limoges en passant par Orléans.

On note N l'événement « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans » et D l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges ».

- Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la Route Départementale entre Orléans et Limoges est 0,565.

Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :

- Paris – Orléans, par autoroute : 3 heures ;

Suite →

- . Orléans – Limoges, par autoroute : 4 heures ;
 - . Orléans – Limoges, par départementale : 3 heures et demie.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, qui donne pour chaque trajet, le temps en heure et la probabilité :

Évén.	$N \cap D$	$N \cap \bar{D}$	$\bar{N} \cap D$	$\bar{N} \cap \bar{D}$
Temps (en h)	5,5			
Proba.	0,12			

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire qui donne la durée du trajet en heure et en donner une interprétation.

Exercice 9 ★★ [Modéliser, Calculer]

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur un smartphone vendu à 800 € : il propose une assurance complémentaire pour 50 € ainsi qu'une coque à 20 €. Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone :

- . 40% des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
- . Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20% ont acheté en plus la coque.
- . Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.

Déterminer la dépense moyenne d'un client de ce magasin ayant acheté ce smartphone.

Exercice 10 ★★ [Modéliser, Calculer]

Une société d'assurance fait un bilan des sinistres qu'elle a eu à rembourser sur plusieurs années. Il apparaît qu'au cours d'une année, 60% des assurés font face à un sinistre. De plus, on estime que pour 50% des assurés connaissant un sinistre, l'assurance rembourse 100 €. Pour 35% d'entre eux, elle rembourse 500 €. Enfin, pour 15% d'entre eux, l'assurance rembourse 1500 €. Chaque assuré paie la même cotisation annuelle. Quelle doit être le montant de la cotisation pour que l'assurance puisse espérer ne pas perdre d'argent en moyenne ?

Exercice 11 ★★ [Modéliser, Représenter, Calculer]

Lors d'une évaluation, les 30 élèves d'une classe obtiennent les notes suivantes :

18 ; 6 ; 7 ; 9 ; 13 ; 7 ; 10 ; 8 ; 15 ; 11 ; 6 ;
4 ; 8 ; 11 ; 5 ; 17 ; 9 ; 10 ; 14 ; 7 ; 9 ; 8 ;
9 ; 4 ; 14 ; 2 ; 10 ; 7 ; 10 ; 5.

Quelle fonction affine doit-on appliquer aux notes des élèves afin que la moyenne soit ramenée à 10 et l'écart-type à 3 ?

Exercice 12 ★★★ [Calculer, Représenter]

On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à ce que l'on tire un six. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers effectués. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$P(X = n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

Exercice 13 ★★★ [Calculer, Modéliser, Chercher]

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches. On tire une première boule au hasard et on note sa couleur. On remet ensuite la boule dans l'urne avant de tirer de nouveau une boule au hasard et de noter sa couleur.

- Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
 M : « Les deux boules tirées sont de la même couleur » ;
 N : « Les deux boules sont de couleurs différentes ».
- On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n + 1)^2$ euros si les deux boules tirées sont de la même couleur et il gagne $2(n + 1)^2$ euros sinon. On note X le gain du joueur (X peut être positive ou négative).
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Démontrer que :

$$E(X) = -n^2 + 4n - 1.$$

- Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?
- Si on laisse choisir au joueur le nombre n de boules blanches, que doit-il répondre pour maximiser son gain ?

Exercice 14 ★★★ [Calculer, Chercher]

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n . Montrer que :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Exercice 15 ★★★ [Modéliser, Chercher]

On choisit trois points distincts parmi les neufs suivants.



Quelle est la probabilité que ces trois points soient alignés ?

Exercice 16 ★★★ [Chercher, Représenter, Modéliser]

On lance 1000 fois un dé équilibré à six faces. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'estimer la probabilité d'obtenir entre 140 et 190 fois le résultat 6.



Exercice 17 ★★ [Modéliser, Calculer]

Un constructeur de véhicules fabrique deux types d'automobiles : « Citadine » ou « Routière ». Pour ces véhicules, ce constructeur propose deux finitions (chaque client doit choisir l'une des deux) :

- « Sport » au tarif de 2500 euros par véhicule,
- « Luxe » au tarif de 4000 euros par véhicule.

En consultant le carnet de commandes de ce constructeur, on recueille les indications suivantes :

- 80% des clients ont commandé une automobile « Citadine ». Les autres clients ont commandé une automobile « Routière ».
- Parmi les clients possédant une automobile « Citadine », 70% ont pris la finition « Sport ».
- Parmi les clients possédant une automobile « Routière », 60% ont pris la finition « Luxe ».

Estimer quelle somme le constructeur peut espérer percevoir pour les finitions s'il vend 1000 véhicules.