Probabilités conditionnelles – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★	5	6, 7, 19			1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 19	
Exercices ★★	14, 17	8, 11, 12, 13, 14, 22, 23	12, 15, 22, 23	18	8, 11, 12, 13, 15, 17, 22	23
Exercices ★★★	20, 21	9, 10, 20			9, 10, 20	10, 21

Exercice 1 ★ [Calculer]

On considère deux événements A et B et le tableau de probabilité suivant.

1. Quelles sont les probabilités indiquées dans le tableau ?
2. Compléter le tableau.
3. Calculer $P(A \cup B)$.
4. Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,5		0,6
$\overline{A}$		0,2	
Total			1

Exercice 2 ★ [Calculer]

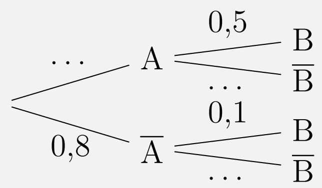
On considère deux événements A et B et le tableau de probabilité suivant.

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,6		0,75
$\overline{A}$		0,03	
Total			

1. Calculer $P(A \cup B)$.
2. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

Exercice 3 ★ [Calculer]

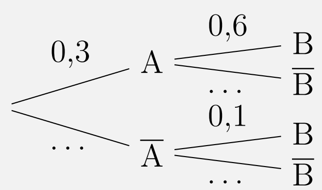
On considère deux événements A et B et l'arbre de probabilité suivant.



1. Quelles sont les probabilités indiquées ?
2. Compléter l'arbre
3. Calculer $P(A \cap B)$.
4. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.
5. Calculer $P(B)$.

Exercice 4 ★ [Calculer]

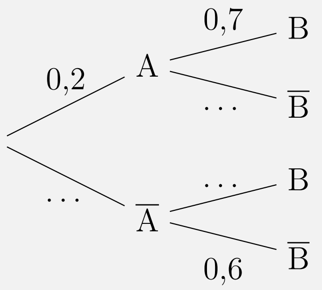
On considère deux événements A et B et l'arbre de probabilité suivant.



1. Quelles sont les probabilités indiquées ?
2. Compléter l'arbre
3. Calculer $P(A \cap \overline{B})$ et $P(\overline{B})$.

Exercice 5 ⋆ [Calculer, Chercher]

On considère deux événements A et B et l'arbre de probabilité suivant.



Calculer $P(A \cup B)$.

Exercice 6 ⋆ [Modéliser, Calculer]

Le tableau incomplet ci-joint donne le nombre de salariés en France, en milliers, selon la catégorie et le type de contrôle de l'entreprise en 2015 (Source : *INSEE2015).*

1. (a) En 2015, 66,8% des salariés des ETI (entreprises de taille intermédiaire) font partie d'un groupe français. Calculer le nombre de salariés des ETI de groupes français.
   (b) Compléter le tableau en arrondissant les résultats au millier près.
2. On choisit au hasard un salarié en 2015. On considère les événements suivants :
   - F : « le salaré fait partie d'un groupe français ».
   - M : « le salarié fait partie d'une PME ».

   (a) Calculer $P(M)$.
   (b) Calculer $P(F \cap M)$ et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette probabilité.
   (c) Calculer $P_M(F)$ et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette probabilité.

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle	Total
Grandes entreprises (GE)	0			4235
Entreprises de taille intermédiaire (ETI)	154			3657
Petites et moyennes entreprises (PME)	1669	2255	335	4259
Microentreprises (MIC)	2549	177	20	2745
Total	4373	8477	2047	14897

Exercice 7 ⋆ [Modéliser, Calculer]

Une enquête est réalisée auprès des 1 500 élèves du lycée Bourbaki qui possèdent un téléphone portable afin de connaître le type d'appareil et le type de forfait dont ils disposent. Il en ressort que : 210 élèves possèdent un smartphone et parmi eux 20% ont un forfait bloqué. Au total, 375 élèves ont un forfait non bloqué.

1. Recopier et compléter le tableau ci-joint.

On interroge au hasard un élève du lycée Bourbaki et on considère les événements :

- S : « l'élève interrogé a un smartphone »
- B : « l'élève interrogé a un forfait bloqué »

2. Calculer la probabilité de l'événement B et celle de l'événement S.
3. L'élève interrogé a un smartphone. Quelle est la probabilité qu'il ait un forfait non bloqué ?
4. Décrire par une phrase l'événement $S \cup B$ et calculer la probabilité de cet événement.

Exercice 8 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On reçoit chaque jour beaucoup de courriels. Pour se protéger des courriels indésirables, on utilise un logiciel anti-spam. Chaque jour,

- 35% des courriels que l'on reçoit sont indésirables ;
- 95% des courriels indésirables sont automatiquement bloqués par le logiciel anti-spam.
- Parmi les courriels qui ne sont pas indésirables, le logiciel anti-spam en bloque 2%.

On choisit au hasard un courriel reçu. Chaque courriel a la même probabilité d'être choisi. On considère les évènements suivants :

- I : « le courriel choisi est indésirable »,
- S : « le logiciel anti-spam bloque le courriel choisi ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le courriel reçu ne soit pas indésirable et soit bloqué par le logiciel anti-spam.
3. Montrer que $P(S) = 0{,}3455$.
4. Le logiciel anti-spam a bloqué un courriel reçu. Calculer la probabilité que ce courriel soit indésirable. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
5. Le fournisseur du logiciel anti-spam affirme que son logiciel se trompe dans moins de 2% des cas. Est-ce vrai ? Justifier votre réponse.

	Nombres d'élèves ayant un smartphone	Nombre d'élèves ayant un autre téléphone	Total
Nombre d'élèves ayant un forfait bloqué			
Nombre d'élèves ayant un forfait non bloqué			375
Total	210		

Exercice 9 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Un modèle de téléphone portable d'une grande entreprise est produit par deux sous-traitants A et B. Chez le sous-traitant A, qui asure 40% de la production totale, 4% des téléphones sont défectueux. Le sous-traitant B assure le reste de la production.

On constate que la probabilité qu'un téléphone pris au hasard dans les stocks de l'entreprise soit défectueux est de 0,034.

Quelle est la probabilité qu'un téléphone provienne du sous-traitant B sachant qu'il est déféctueux ? Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 10 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Communiquer]

Le dépistage d'une maladie rare et incurable s'effectue par un test basé sur le dosage d'une hormone particulière. On estime qu'elle touche environ une personne sur 200 000.

Un de vos amis a été diagnostiqué positif a cette maladie. Le médecin lui a indiqué que pour une personne atteinte par la maladie, le test est positif dans 97% des cas alors que pour une personne non atteinte, le test est négatif dans $99,5\%$ des cas.

Comment pouvez vous rassurer votre ami ?

Exercice 11 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20% des cas. Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30% des cas
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10% des cas On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :
- B : « l'angine est bactérienne » ;
- T : « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif ?
3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.
4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

Exercice 12 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Une chaine de salon de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

- une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur soin » ;
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Une étude statistique montre que 40% des clients demandent une « couleur soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur-soin », 30% des clients demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 24% des clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».

On interroge un client au hasard.

On note C l'événement : « Le client souhaite une couleur soin ».
On note E l'événement : « Le client souhaite un effet coup de soleil ».

1. Donner le valeurs de $\mathrm{P(C)}$, $\mathrm{P(C \cap E)}$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{E})$.
2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une couleur soin, ni un effet coup de soleil.
3. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à 0,42.
4. Les événements C et E sont-ils indépendants ?

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.
On lance trois fois un dé équilibré à 6 faces (numérotées de 1 à 6). Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.
Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. « $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère ».
2. « Pour tout x, $f(x) = 3x^2 + x + 2$ ».
3. « f est une fonction affine ».
4. « f admet une unique racine réelle ».
5. « 0 admet exactement deux antécédents par f ».
6. « L'extremum de f est atteint pour $x = -1$ ».

Exercice 14 ⋆⋆ [Chercher, Modéliser]

On lance deux fois un dé non truqué à six faces et on considère le nombre formé par les deux numéros pris dans l'ordre de sortie. Par exemple, si l'on obtient 5 et 6 pour les deux lancers, on considère le nombre 56.

1. Calculer la probabilité que le nombre considéré soit premier sachant qu'il contient au moins un 2.
2. Calculer la probabilité que le nombre considéré contienne au moins un 3 sachant qu'il est premier.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Montrer que pour tous événements A et B tels que $\mathrm{P(A)} \neq 0$ et $\mathrm{P(B)} \neq 0$:

$$\mathrm{P_A(B)} = \frac{\mathrm{P(B)} \times \mathrm{P_B(A)}}{\mathrm{P(A)}}.$$

Écrire ensuite une fonction algorithmique en langage Python prenant pour arguments les valeurs de $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B)}$ et $\mathrm{P_B(A)}$ et renvoyant en sortie la valeur de $\mathrm{P_A(B)}$.

Exercice 16 ⋆ [Calculer]

Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A et B sont indépendants.

1. $\mathrm{P(A)} = 0{,}5$; $\mathrm{P(B)} = 0{,}3$ et $\mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}15$
2. $\mathrm{P(A)} = 0{,}4$; $\mathrm{P(B)} = 0{,}3$ et $\mathrm{P(A \cup B)} = 0{,}7$

Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer, Chercher]

Soient A et B deux événements indépendants tels que $\mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}4$ et $\mathrm{P(A \cup B)} = 0{,}9$. Déterminer $\mathrm{P(A)}$ et $\mathrm{P(B)}$

Exercice 18 ⋆⋆ [Raisonner]

Soient A et B deux événements. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants et incompatibles.

Exercice 19 ⋆ [Calculer, Modéliser]

On lace un dé non truqué à six faces et on note les événements suivants :

- A : « le résultat est 4, 5 ou 6 ».
- B : « le résultat est 5 ou 6 ».
- C : « le résultat est pair ».

Pour chaque question, conjecturer le résultat sans calcul puis le vérifier par le calcul.

1. A et B sont indépendants.
2. A et C sont indépendants.
3. B et C sont indépendants.

Exercice 20 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer, Modéliser]

(d'après Lê Nguyên Hoang, *Science4all*)

On suppose que la probabilité de donner naissance à une fille ou à un garçon est la même, c'est-à-dire 0,5. On admet de plus que le sexe d'un enfant est indépendant du sexe de ses frères et sœurs.

Une famille a deux enfants. On sait qu'au moins l'un des enfants est un garçon né un mardi. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également un garçon ?

Exercice 21 ⋆ ⋆ ⋆ [Communiquer, Chercher]

En 1964, les États-Unis ont voté une loi (Civil Right Acts) mettant fin dans la loi à toute forme de ségrégation et de discrimination reposant sur la race, la couleur de peau, la religion, le sexe ou l'origine nationale. En analysant les résultats du vote, il apparaît que les députés démocrates ont davantage votés en faveur de la loi que les députés républicains. Cela est vrai tant dans les États du Nord que dans les États du Sud. Pourtant, sur l'ensemble du pays, 80% des républicains ont voté en sa faveur contre seulement 61% des démocrates. Comment ce phénomène est-il possible ?

Exercice 22 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée pour connaître leur point de vue sur la durée d'une pause méridienne et sur les rythmes scolaires. L'enquête révèle que 55% des élèves sont favorables à une pause méridienne plus longue.

Parmi ceux qui sont favorables à une pause méridienne plus longue, 95% souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne sont pas favorables à une pause méridienne plus longue, seulement 10% souhaitent une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On tire au hasard le nom d'un élève du lycée. On considère les événements suivants :

- L : « L'élève est favorable à une pause méridienne plus longue. »
- C : « L'élève souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. »

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité que l'élève concerné soit favorable à une pause méridienne plus longue et souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
3. Montrer que $P(C) = 0{,}5675$.
4. Calculer la probabilité que l'élève concerné soit favorable à une pause méridienne plus longue sachant qu'il souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
   En donner un arrondi à 10^{-4}.
5. Les événements L et C sont-ils indépendants ?

Exercice 23 ⋆⋆ [Modéliser, Représenter, Communiquer]

On considère un calendrier en forme de dodécaèdre (polyèdre à 12 faces).

1. Lancer 300 fois le calendrier et noter le nombre de fois où il est tombé sur le mois de Janvier.
2. Écrire un algorithme en langage Python permettant de définir 1000 nombres aléatoirement entre 1 et 31 (correspondant aux jours) puis de calculer la fréquence d'apparition du nombre 1.
3. Pour choisir aléatoirement un jour de l'année 2022, on procède de la façon suivante :
   - On lance le calendrier afin d'obtenir le mois.
   - On utilise l'algorithme suivant pour obtenir le jour :

```python
from random import *
randint(1,31)
```

   Dans le cas où l'on tombe sur un jour qui n'existe pas (par exemple, le 31 février), on recommence entièrement la procédure.

   (a) Peut-on considérer que les choix du mois et du jour sont indépendants ?

   (b) En utilisant les réultats obtenus expérimentalement aux questions 1 et 2, en déduire une valeur approchée de la probabilité de tomber sur le 1 Janvier.