Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 4
Probabilités conditionnelles

Table des matières

1 Probabilités conditionnelles

Dans tout le chapitre, on considère un espace de probabilité Ω.

Définition 1 – Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements avec $\mathrm{P(A)} \neq 0$. La probabilité de B sachant A est :

$$\mathrm{P_A}\left(\mathrm{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)}$$

Exemple.
Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P(A)} = 0,5$ et $\mathrm{P(A \cap B)} = 0,2$. Déterminer $\mathrm{P_A(B)}$.

Solution :

$$\mathrm{P_A(B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

Remarque.
- En général, le mot « parmi » dans un énoncé se traduit par une probabilité conditionnelle.
- Attention ! Les probabilités conditionnelles $\mathrm{P_A(B)}$ et $\mathrm{P_B(A)}$ ne sont en général pas égales.

Proposition 1

Soient A et B deux événements avec $\mathrm{P(A)} \neq 0$. Alors,

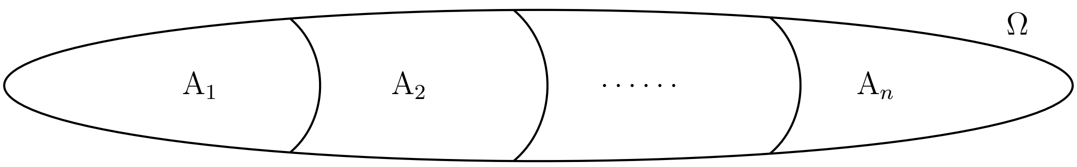
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right) = \mathrm{P_A(B)} \times \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)$$

Démonstration.
D'après la définition, on sait que $\mathrm{P_A}\left(\mathrm{B}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)}$. Il suffit de multiplier chaque terme de cette égalité par $\mathrm{P(A)}$ pour obtenir le résultat souhaité. □

2 Formule des probabilités totales

Définition 2

Soit $n \geqslant 2$. Soient $\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \ldots, \mathrm{A}_n$ des événements non vides. On dit qu'ils forment **une partition de l'univers** Ω lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :
- Ils sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j$, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$;
- $\mathrm{A_1} \cup \mathrm{A_2} \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \Omega$



Exemple.
On lance un dé à six faces. L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.
On considère les événements suivants :
A : « Obtenir un résultat pair » ;
B : « Obtenir un 5 » ;
C : « Obtenir un 1 ou un 3 ».
Les événements A, B et C forment ainsi une partition de l'univers.

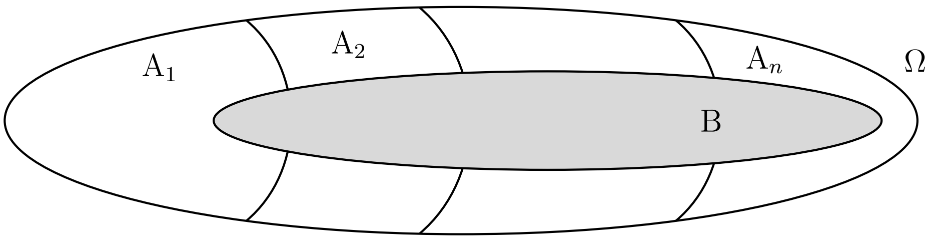
Remarque.
Si A est un événement de probabilité non nulle, alors A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers car :

- $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$;
- $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$.

Proposition 2 – Formule des probabilités totales

Soit $n \geqslant 2$. Soient A_1, A_2, …, A_n des événements formant une partition de l'univers et soit B un événement. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{P(B)} &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})\end{aligned}$$



Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Soient A_1, A_2, …, A_n des événements formant une partition de l'univers et soit B un événement. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{P(B)} &= \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \Omega) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap (\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n)) \\ &= \mathrm{P}((\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_1) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_2) \cup \ldots \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_n)) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_2) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_n)\end{aligned}$$

car les événements A_i sont deux à deux disjoints donc les événements $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}$ aussi.
Pour montrer la deuxième égalité, on utilise ensuite le fait que, pour tout entier i,

$$\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B}).$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}).$$

□

Exemple.
Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P(A)} = 0{,}6$, $\mathrm{P_A(B)} = 0{,}5$ et $\mathrm{P_{\overline{A}}(B)} = 0{,}1$.
Déterminer P(B).

Solution :
On sait que $\mathrm{P(\overline{A})} = 1 - \mathrm{P(A)} = 0{,}4$. Par ailleurs, comme A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P(B)} &= \mathrm{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)} \\ &= \mathrm{P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) + P(A) \times P_A(B)} \\ &= 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}34\end{aligned}$$

3 Calcul des probabilités conditionnelles en pratique

3.1 Utilisation des tableaux

Un tableau à double entrée permet souvent de présenter de façon claire une expérience probabiliste et de calculer facilement des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	Total
A	$\mathrm{P(A \cap B)}$	$\mathrm{P(A \cap \overline{B})}$	P(A)
$\overline{\mathrm{A}}$	$\mathrm{P(\overline{A} \cap B)}$	$\mathrm{P(\overline{A} \cap \overline{B})}$	$\mathrm{P(\overline{A})}$
Total	P(B)	$\mathrm{P(\overline{B})}$	1

Remarque.
Dans le tableau ci-dessus :
- $\mathrm{P(A \cap B)}$ se lit à l'intersection des lignes A et B.
- P(A) se lit sur la dernière colonne et on a :

$$\mathrm{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})} \quad \text{(formule des probabilités totales)}$$

Exemple.
Dans une entreprise de 450 salariés, il y a 270 hommes et 180 femmes. Par ailleurs, les salariés se répartissent en deux catégories : les cadres et les ouvriers. On sait plus précisément qu'il y a 80 cadres et que le nombre de femmes cadres est de 45. Quel est le pourcentage d'ouvriers parmi les hommes de l'entreprise ?

Solution :
On réalise le taleau suivant donnant la proportion de salariés pour chaque catégorie (hommes/femmes et cadres/ouvriers).

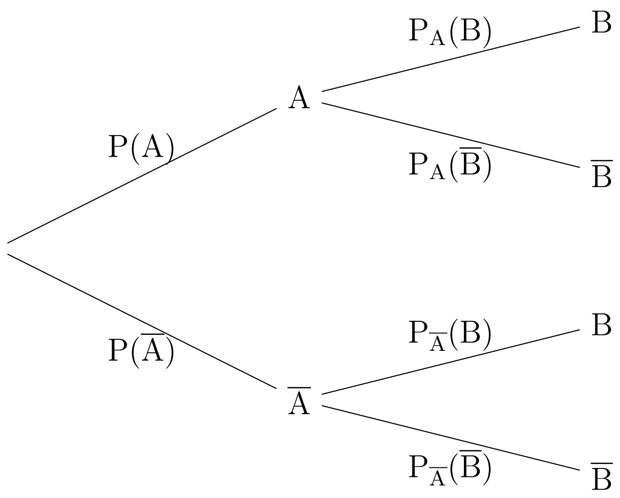
	cadres	ouvriers	Total
femmes	$\frac{45}{450}$	$\frac{135}{450}$	$\frac{180}{450}$
hommes	$\frac{35}{450}$	$\frac{235}{450}$	$\frac{270}{450}$
Total	$\frac{80}{450}$	$\frac{370}{450}$	1

On choisit un salarié au hasard et on considère les événements suivants :
H : « Le salarié est un homme » ;
O : « Le salarié est un ouvrier ».
Avec ces notations, la proportion cherchée est $\mathrm{P_H(O)}$:

$$\mathrm{P_H(O)} = \frac{\mathrm{P(O} \cap H)}{\mathrm{P(O)}} = \frac{\frac{235}{450}}{\frac{270}{450}} = \frac{235}{270} \simeq 87\%.$$

3.2 Utilisation des arbres

Un arbre de probabilité est un autre moyen de représenter efficacement une situation probabiliste et de calculer des probabilités conditionnelles.



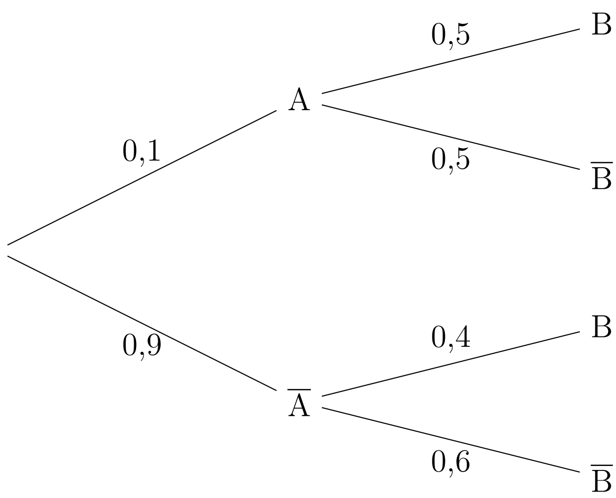
Remarque.

- La somme des probabilités des chemins issues d'un noeud est égale à 1.
  Par exemple, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ et $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

- La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements que comporte ce chemin. Elle se calcule en multipliant les probabilités du chemin.
  Par exemple, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ (d'après la propriété 1).

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des chemins conduisant à cet événement.
  Par exemple, $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (d'après la formule des probabilités totales)

Exemple.
On considère deux événements A et B dont les probabilités sont représentées dans l'arbre ci-dessous.



Déterminer P(B).

Solution :
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\
&= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\
&= 0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}9 \times 0{,}4 \\
&= 0,41
\end{aligned}$$

Méthode – Déterminer des probabilités

- Faire un tableau
  (plutôt lorsqu'on connait les probabilités des intersections)
- Faire un arbre
  (plutôt lorsqu'on connait les probabilités conditionnelles)

3.3 Calculer $P_B(A)$ lorsqu'on connait $P_A(B)$

Méthode – Calculer $P_B(A)$ lorsqu'on connait $P_A(B)$

- Écrire la définition de $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

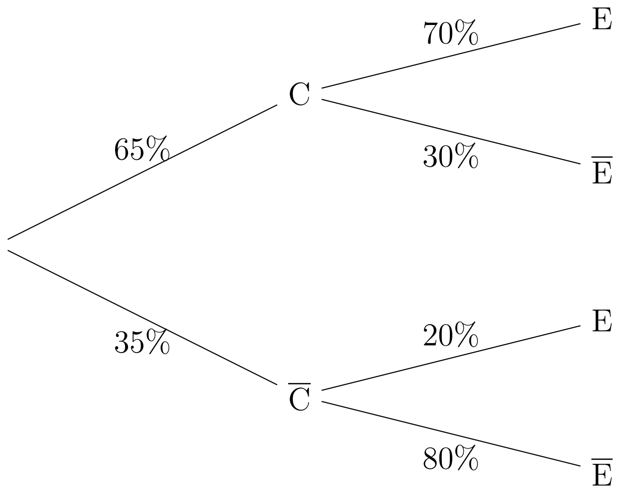
- Calculer $P(A \cap B)$ grâce à $P_A(B)$.
- Calculer $P(B)$ avec la formule des probabilités totales.

Exemple. Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65% des personnes intérrogées sont contre la construction du barrage ;
- Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes.
- Parmi les personnes qui sont favorables à la construction, 20% sont des écologistes.

Quelle est la proportion de personnes contre le barrage parmi les écologistes ?

Solution :
On note C l'événement « La personne interrogée est contre la construction » et E l'événement « La personne interrogée est écologiste ».
On souhaite déterminer $P_E(C) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(E)}$.
On représente la situation par l'arbre suivant :



D'une part, on voit sur l'arbre que $P(E \cap C) = 65\% \times 70\% = 45{,}5\%$.
D'autre part, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap C) + P(E \cap \overline{C}) \\ &= 65\% \times 70\% + 35\% \times 20\% \\ &= 52{,}5\% \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$P_E(C) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{45{,}5\%}{52{,}5\%} \simeq 86{,}7\%.$$

Il y a donc environ 86,7% de personnes contre le barrage parmi les écologistes.

4 Indépendance d'événements

Définition 3 – Indépendance

Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple.
Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}7$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Solution :
$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06 \neq P(A \cap B)$.
On en déduit que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Proposition 3

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$P_A(B) = P(B).$$

Démonstration.
$P(A) \neq 0$ donc $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, c'est-à-dire $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\text{A et B sont indépendants} &\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &\iff P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B) \\ &\iff P_A(B) = P(B) \qquad\qquad (\text{car } P(A) \neq 0)\end{aligned}$$

□

Proposition 4

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Démonstration.
B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabiltiés totales :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Par indépendance de A et B, on a :

$$P(A) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \overline{B})$$

donc

$$P(A)\,(1 - P(B)) = P(A \cap \overline{B})$$

donc

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$$

Cela signifie exactement que A et $\overline{B}$ sont également indépendants. □

Savoir-faire du chapitre

- Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Calculer une probabilité conditionnelle.
- Utiliser la formule des probabilités totales (en particulier avec un arbre).
- Construire et utiliser un arbre ou un tableau pour résoudre un problème.
- Distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$ dans des problèmes de type « faux-positifs ».
- Déterminer et utiliser l'indépendance de deux événements.

QCM d'entrainement