Suites arithmétiques et géométriques – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆			16		1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 13, 16	
Exercices ⋆⋆		17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24	21		5, 6, 7, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24	19
Exercices ⋆⋆⋆	25, 27, 28	26	27, 28		25, 26, 27, 28	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les quatres premiers termes de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$
2. $u_0 = 2$ et $r = -2$
3. $u_0 = -1$ et $r = \frac{1}{2}$
4. $u_0 = -\frac{4}{3}$ et $r = 0$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou non. Si oui, donner le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = 5n + 8$
2. $u_n = n^2 - 1$
3. $u_n = 2^n$
4. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
5. $u_n = \dfrac{3n-5}{7}$
6. $u_n = \dfrac{n^2-n-2}{n+1}$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$
8. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n + 5$

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$
2. $u_0 = -2$ et $r = -3$
3. $u_0 = 7$ et $r = -\frac{3}{4}$

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Une suite arithmétique a pour premier terme 10 et pour raison 7. Quelle est la valeur du cinquième terme ?

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, on donne la valeur d'un terme d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la raison r de cette suite. Déterminer le premier terme u_0.

1. $u_{11} = 1$ et $r = 3$
2. $u_{19} = \frac{7}{3}$ et $r = -\frac{1}{4}$

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, on donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n). Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

1. $u_7 = 31$ et $u_{13} = 50$
2. $u_{15} = 7$ et $u_{47} = -\dfrac{3}{4}$

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 64$
2. $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 1027$
3. $S = 3 + 6 + 9 + \ldots + 1452$
4. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{13} (5k + 1)$
5. $S = 351 + 358 + 365 + \ldots + 715$

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les quatres premiers termes de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et $q = 2$
2. $u_0 = 2$ et $q = -2$
3. $u_0 = \dfrac{5}{7}$ et $q = 1$
4. $u_0 = -1$ et $q = \dfrac{1}{4}$

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1$ et $q = 3$
2. $u_0 = 2$ et $q = -3$
3. $u_0 = -7$ et $q = \dfrac{3}{4}$

Exercice 10 ⋆ [Calculer]

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques ou non. Si oui, donner le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = 5n$
2. $u_n = 2^n$
3. $u_n = n^3$
4. $u_n = 3^{n+1}$
5. $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 5}{n + 1}$
6. $u_n = \dfrac{4 \times 5^n}{3}$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + 7$
8. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 7nu_n$

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

Une suite géométrique a pour premier terme 2 et pour raison 2. Quelle est la valeur du dixième terme ?

Exercice 12 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, on donne deux termes d'une suite géométrique (u_n). Déterminer le premier terme et la raison de cette suite en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

1. $u_7 = 16$ et $u_{10} = 128$
2. $u_{15} = \dfrac{2}{5}$ et $u_{18} = \dfrac{3}{4}$

Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 1024$
2. $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{729}$
3. $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{15} 3^i$
4. $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^k$
5. $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \ldots + \dfrac{1}{256} - \dfrac{1}{512}$

Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer]

1. Justifier que les nombres 8, 12 et 18 peuvent être, dans cet ordre, les trois premiers termes u_0, u_1 et u_2 d'une suite géométrique (u_n) dont on précisera la raison q.
2. Calculer u_5 et u_6. En déduire le plus petit nombre entier n tel que $u_n \geq 10u_0$.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer]

On donne un terme et la raison d'une suite géométrique u :

$$u_{11} = 102{,}6 \quad \text{et} \quad q = 1{,}1$$

Calculer le premier terme u_1 en arrondissant le résultat à 10^{-2}.

Exercice 16 ⋆ [Représenter, Calculer]

Déterminer, pour chacune des suites ci-dessous, ses variations et sa limite.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 5$.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $u_0 = 6$.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.
5. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = -5$.

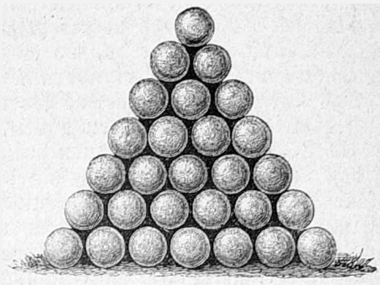
Exercice 17 ⋆⋆ [Modéliser]

La période du carbone 14 est 5700 ans. Lorsqu'il s'écoule 5700 ans, la masse de carbone a donc été divisée pas 2. On note D_n la masse de carbone 14 d'un échantillon d'os après $n \times 5700$ années. On sait que $D_0 = 100$ (correspondant à 100% de l'échantillon initial).

1. Quelle est la nature de la suite de terme général D_n ?
2. Écrire D_n en fonction de n
3. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 8% de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse, pris comme témoin. Déterminer, au siècle près, l'âge de ces fragments.

Exercice 18 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On range des rondins de bois en les entassant en forme de pyramide. Par exemple, sur le dessin ci-dessous, il y a 7 rangées de rondins de bois pour un total de 28 rondins.



Combien de rangées complètes de la pyramide peut-on construire si l'on dispose de 500 rondins de bois ?

Exercice 19 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Communiquer]

En Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors un jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu (dont le plateau comporte 64 cases) et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met. Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande.

On estime par ailleurs que la production mondiale de riz est estimée par le FAO à 497 millions de tonnes en 2019. De plus, le poids moyen d'un grain de riz est d'environ 0,04g. Estimer combien d'années faudrait-il à la production mondiale actuelle pour réaliser la demande de Sissa ?

Exercice 20 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Une famille décide d'épargner dans l'objectif de s'offrir un voyage dont le coût total est estimé à 3700 €. La première année, elle économise 300 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 150 €. Pour $n \geqslant 1$, on note s_n la somme épargnée de l'année n. Ainsi, on a $s_1 = 300$, $s_2 = 300 + 450$, $s_3 = 300 + 450 + 600$, *etc.*

1. Déterminer l'expression de s_n en fonction de n.
2. En résolvant une inéquation, déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage.

Exercice 21 ⋆⋆ [Modéliser, Représenter]

Lors du lancement d'un hebdomadaire, 1200 exemplaires ont été vendus. Une étude de marché prévoit une progression des ventes de 2% chaque semaine. On modélise le nombre d'hebdomadaires vendus par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus durant la n^{e} semaine après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1200$.

1. Calculer le nombre u_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Écrire, pour tout entier naturel n l'expression de u_n fonction de n
3. Déterminer le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an.
4. Voici le programme suivant :

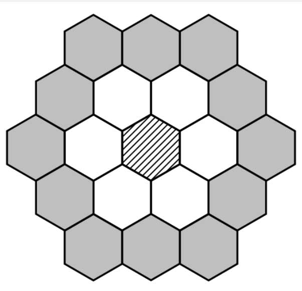
```
def suite():
  u=1200
  S=1200
  n=0
  while S<30000:
    n=n+1
    u=u*1.02
    S=S+u
  reurn(n)
```

Le programme retourne la valeur 20. Interpréter ce résultat.

Exercice 22 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce. Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- À l'étape 1, il entoure le carreau central, À l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- À l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n^e étape ($n \geqslant 1$).
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?
2. On admet que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n (pour $n \geqslant 1$).
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?
   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1+2+3+\ldots+n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n^e étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977^e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

Exercice 23 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

Offre
Intérêts composés au taux annuel constant de 3%.

À la fin de chaque année le capital produit 3% d'intérêts qui sont intégrés au capital.
On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa. On a ainsi $u_0 = 5000$.

1. Montrer que $u_1 = 5150$ et $u_2 = 5304{,}5$.
2. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.
4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10 000 euros ?

Exercice 24 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de $3,7\%$ chaque année. On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000+n$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'années à partir de l'an 2000. Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.
5. Des études montrent que 20% de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70% de ces déchets finissent par couler. Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Exercice 25 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 660$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}99u_n - 0{,}1$.

1. La suite (u_n) est-elle géométrique ? est-elle arithmétique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 10$ (pour tout entier $n \geqslant 0$).
3. Montrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$,
$$u_n = 670 \times 0{,}99^n - 10.$$

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

La victoire de l'équipe féminine espagnole, le 2 août 2013, aux championnats du monde de water-polo a été fortement médiatisée en France. Il s'ensuivit une forte augmentation du nombre de filles licenciées dans tous les clubs français de waterpolo à partir de septembre 2013. Au 1er septembre 2013, les clubs français de water-polo comptaient 4 500 filles licenciées. L'évolution du nombre de filles licenciées est modélisée par une suite (u_n) de la façon suivante : u_0 représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, au 1er septembre 2013. Ainsi $u_0 = 4{,}5$. Pour tout $n > 1$, u_n représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, n mois plus tard. Ainsi u_1 désigne le nombre de filles licenciées au 1er octobre 2013, u_2 désigne le nombre de filles licenciées au 1er novembre 2013, etc.
On constate que la suite (u_n) vérifie : pour tout entier n, $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

1. (a) Donner le nombre de filles licenciées à chacune des dates suivantes : au 1er octobre 2013, au 1er novembre 2013 et au 1er décembre 2013.

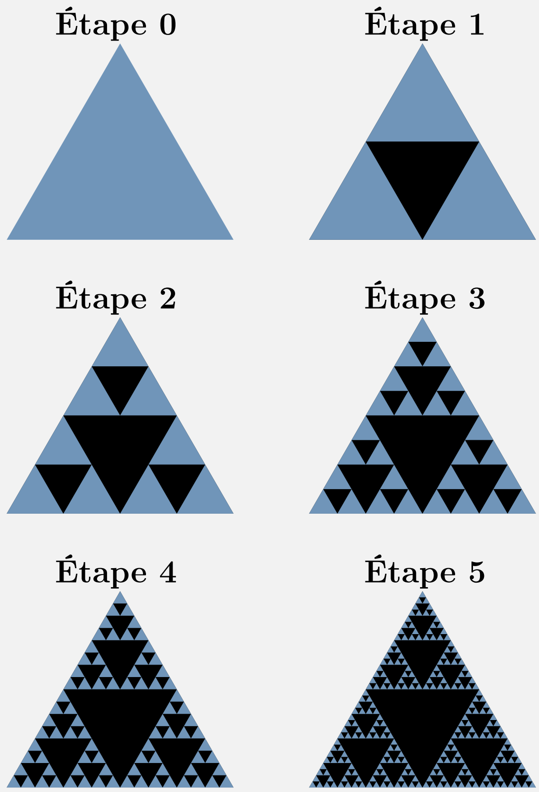
   (b) p_1 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er septembre et le 1er octobre 2013.
   p_2 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er octobre et le 1er novembre 2013.
   p_3 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1er novembre et le 1er décembre 2013.
   Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près de p_1, p_2 et p_3.

Touner S.V.P.

2. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout entier n, $v_n = 10 - u_n$.
   (a) Donner la valeur de v_0.
   (b) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$. Détailler le calcul.
   (c) Exprimer, pour tout entier n, v_n en fonction de n.
3. Justifier alors que, pour tout entier n, $u_n = 10 - 5{,}5 \times 0{,}8^n$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Justifier la réponse.
5. Écrire un algorithme en langage Python permettant de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 1$;

Exercice 28 ⋆⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

On considère un triangle équilatéral d'aire égale à 1. Pour construire la figure ci-dessous, on partage le triangle en 4 triangles égaux et on noircit celui du centre. Ensuite, on partage les 3 triangles restants en 4 triangles égaux et on noircit les 3 triangles au centre. On recommence cette construction à chaque étape. On note a_n l'aire totale noircie jusqu'à l'étape n. On a donc $a_0 = 0$ et $a_1 = \dfrac{1}{4}$.

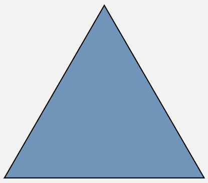


1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
3. Écrire un algorithme en langage Python permettant de déterminer à partir de quelle étape, plus de 99% du triangle aura été noirci.

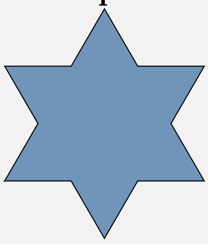
Exercice 29 ⋆⋆ [Chercher, Représenter, Calculer]

On construit une figure de la façon suivante : À l'étape 1, on construit un triangle équilatéral de côté 1. Ensuite, à chaque étape, on partage chaque côté de la figure en trois parties égales et on remplace le segment du milieu par un triangle équilatéral dont on efface la base. On a représenté ci-dessous la figure obtenue lors des quatre premières étapes.

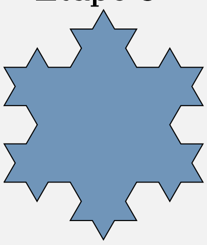
Étape 1



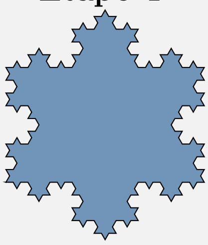
Étape 2



Étape 3



Étape 4



Partie A - Étude des périmètres

On note p_n le périmètre de la figure obtenue à l'étape n.

1. Exprimer p_n en fonction de n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
3. Écrire un algorithme en langage Python permettant de déterminer à partir de quelle étape, le périmètre de la figure dépassera 10^9.

Exercice 30 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Partie B - Étude des aires

On note a_n l'aire de la figure obtenue à l'étape n.

1. Montrer que $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)\right)^n.$$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Partie C - Bilan

Le flocon de Von Koch est la figure obtenue lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle particularité possède le flocon de Von Koch du point de vue de son périmètre et de son aire ?