Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 3
Suites arithmétiques et géométriques

Table des matières

1 Les suites arithmétiques

1.1 Expression par récurrence et expression explicite

Définition 1

Une suite est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode – Montrer qu'une suite est arithmétique

- Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Montrer que pour tout n, cette différence est constante et ne dépend pas de n.

Exemple.
Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 4$ est arithmétique et préciser sa raison.

Solution :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (5(n+1) - 4) - (5n - 4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 5.

Proposition 1

- Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :
$$u_n = u_0 + nr, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
- Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :
$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

Démonstration.
Pour calculer u_n à partir de u_0, il faut ajouter n fois la raison r, d'où le fait que $u_n = u_0 + nr$. Dans le cas où le premier terme est u_1, il y a $(n-1)$ termes entre u_1 et u_n, d'où le second résultat. □

Remarque.
On peut retenir que :

$$u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison}).$$

1.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition 2

Pour tout entier naturel n non nul,

$$1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On note $S=1+2+\ldots+n$. On va alors calculer astucieusement $S+S$ pour en déduire la valeur de S. On a :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Ainsi, $S+S=2S=n\times(n+1)$ et on en déduit que $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

□

Méthode – Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

- Faire apparaître la somme $1+2+\ldots+n$.
- Simplifier en veillant à compter correctement le nombre de termes.

Exemple.
Calculer la somme $10+13+16+19+\ldots+163$.

Solution :
$10+13+16+19+\ldots+163=u_0+u_1+\ldots+u_{51}$ où u_n est la suite arithmétique de premier terme $u_0=10$ et de raison 3.
On a donc :

$$\begin{aligned}10+13+16+\ldots+163&=10+(10+3)+(10+6)+\ldots+(10+153)\\&=52\times10+(3+6+\ldots+153)\\&=52\times10+3\times(1+2+\ldots51)\\&=52\times10+3\times\frac{51\times52}{2}\\&=4498\end{aligned}$$

1.3 Variations d'une suite arithmétique

Proposition 3

Une suite arithmétique de raison r est :
- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

Démonstration.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour déterminer le sens de variation d'une suite, il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Or, $u_{n+1} - u_n = r$, d'où le résultat dépendant du signe de r. □

1.4 Limite d'une suite arithmétique

Proposition 4

Si u est une suite arithmétique de raison r alors :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ si $r = 0$.

2 Les suites géométriques

2.1 Expression par récurrence et expression explicite

Définition 2

Une suite est dite **géométrique** s'il existe $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode – Montrer qu'une suite est géométrique

- Calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Montrer que pour tout n, ce quotient est constant et ne dépend pas de n.

Exemple.
Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$ est géométrique et préciser sa raison.

Solution :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

Proposition 5

- Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :
  $u_n = u_0 q^n, \quad$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- Pour une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q :
  $u_n = u_1 q^{n-1}, \quad$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Démonstration.
Pour calculer u_n à partir de u_0, il faut multiplier n fois par la raison q, d'où le fait que $u_n = u_0 q^n$. Dans le cas où le premier terme est u_1, il y a $(n-1)$ termes entre u_1 et u_n, d'où le second résultat. □

Remarque.
On peut retenir que :

$$u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}.$$

Exemple.
Dans un pays donné, on note u_n le nombre d'habitants à l'année $2000 + n$. On suppose que $u_0 = 10^6$ et que le nombre d'habitants augmente de 1% par an. Calculer le nombre d'habitants de ce pays en 2020.

Solution :
L'année 2020 correspond à $n = 20$ et il faut donc calculer u_{20}.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une suite géométrique de raison 1,01 (car augmenter de 1% une quantité revient à la multiplier par 1,01). Ainsi,

$$u_{20} = u_0 q^{20} = 10^6 \times 1{,}01^{20} \simeq 1{,}22 \times 10^6.$$

Remarque.
La plupart du temps, lorsqu'on est dans une situation où une quantité (un prix, un salaire, un nombre de kilos produits, un nombre de personnes...) augmente ou diminue de x pourcent chaque année (avec le même pourcentage), cette quantitié est une suite géométrique.

2.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 6

Si $q \neq 1$, et si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration.
Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n &= u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^n \\ &= u_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Cette égalité est équivalente à la suivante :

$$(1 - q)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = 1 - q^{n+1}.$$

Pour montrer cette dernière égalité, il suffit en fait de développer le terme de gauche :

$$\begin{aligned} (1 - q)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) &= 1 + q - q + q^2 - q^2 + \ldots + q^n - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

□

Remarque.
Si le premier terme de la suite géométrique est u_1 et que la raison est $q \neq 1$, on a :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

De manière générale, on peut retenir que la somme est donnée par :

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$$

Exemple.
Calculer la somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 + 2^9$.

Solution :
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 + 2^9 = \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023.$

2.3 Variations d'une suite géométrique

Proposition 7

Une suite géométrique u de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$ est :
- croissante si $q > 1$;
- décroissante si $0 < q < 1$;
- constante si $q = 1$.

Démonstration.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Comme $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$, on sait que pour tout n, $u_n \neq 0$.
On peut donc étudier le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
En fait, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, d'où le résultat dépendant du signe de q.

□

Remarque.
Si la raison d'une suite géométrique est strictement négative, la suite n'est pas monotone.

2.4 Limite d'une suite géométrique

Proposition 8

Si u est une suite géométrique de raison $q > 0$ alors :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $q > 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ si $0 < q < 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ si $q = 1$.

Remarque.
Si la raison d'une suite géométrique est strictement négative, la suite n'admet pas de limite.

Savoir-faire du chapitre

- Modéliser une situation par une suite numérique.
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général u_n en fonction de n, calculer la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation, déterminer la limite.
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, différencier et faire le lien entre formule explicite et formule par récurrence.

QCM d'entrainement