Suites numériques – Généralités – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★			2, 6, 7, 9		1, 3, 4, 9, 19	
Exercices ★★	21	10, 15	5, 8, 15, 21, 22, 23, 24	20	11, 12, 13, 16, 17, 18, 22	
Exercices ★★★		25, 26	25, 26		14, 25, 26	

Exercice 1 ★ [Calculer]

Calculer dans chacun des cas la valeur de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

1. $u_n = 5n + 2$
2. $u_n = n^2 - 1$
3. $u_n = -3n^2$
4. $u_n = \dfrac{n}{n+5}$

Exercice 2 ★ [Représenter]

Dans chaque cas, représenter les cinq premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère adapté.

1. $u_n = n + 2$
2. $u_n = 5n - 5$
3. $u_n = n^2$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3 ★ [Calculer]

Calculer dans chaque cas la valeur des quatre premiers termes de la suite.

1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n)^n \end{cases}$

Exercice 4 ★ [Calculer]

Calculer dans chacun des cas le terme u_5 de la suite u définie par :

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (-3)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $u_n = \sqrt{n^3 + 11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = 2^{n+5} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ⋆⋆ [Représenter]

On considère le programme de calcul suivant : on commence avec le nombre 5, puis à chaque étape, on ajoute 3 au carré du résultat précédent.
Quelle suite le programme de calcul définit-il ?

Exercice 6 ⋆ [Représenter]

On considère l'algorithme suivant.

```python
for k in range(1,101):
  U=2*k+3
print(U)
```

1. Quelle sera la valeur affichée par l'algorithme ?
2. On note (u_n) la suite associée aux valeurs calculées successivement par l'algorithme. Donner l'expression du terme général de la suite u_n.

Exercice 7 ⋆ [Représenter]

On considère l'algorithme suivant.

```python
U=1
for k in range(216):
  U=U/(U+1)
print(U)
```

1. On note (u_n) la suite associée aux valeurs calculées successivement par l'algorithme. Donner la valeur de u_0 et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
2. A quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme ?

Exercice 8 ⋆⋆ [Représenter]

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par le terme général $u_n = \dfrac{5}{n+1}+4$. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes de la suite.
2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 2$. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes de la suite.

Exercice 9 ⋆ [Calculer, Représenter]

À l'aide de la calculatrice, calculer les 30 premiers termes des suites ci-dessous.

1. $u_n = 3n + 4$
2. $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$
3. $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = 0{,}4u_n$.
4. $u_n = \sqrt{n} + 1$.

Exercice 10 ⋆⋆ [Modéliser]

Dans chaque cas, déterminer si l'énoncé définit une suite de manière explicite ou par récurrence. S'il s'agit d'une suite définie explicitement, donner l'expression de u_n en fonction de n. S'il s'agit d'une suite définie par récurrence, donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

1. Le prix d'un café est de 1,50 €. On note u_n le prix de n cafés.
2. On utilise un logiciel de compression d'images. À chaque compression, on estime que la taille de l'image (en Mo) est divisée par deux. On note u_n la taille de l'image après l'avoir compressée n fois.

Tourner S.V.P.

3. Un célèbre prof de mathématiques est l'auteur d'une chaîne *youtube*. On estime qu'en 2017, il avait 150 000 abonnés et que chaque années, le nombre d'abonnés augmente de 115 000. On note u_n le nombre d'abonnés à l'année $2017+n$.
4. On s'intéresse à une population d'insectes d'un parc naturel. Chaque année, on estime que le nombre d'insectes diminue de 5%. On note u_n le nombre d'insectes à l'année n.
5. Une voiture roule sur l'autoroute à une vitesse constante de 130km.h^{-1}. On note u_n la distance qu'elle parcourt en n heures.
6. Une voiture roule sur l'autoroute à une vitesse constante de 130km.h^{-1}. On note u_n la temps nécessaire pour qu'elle parcourt n kilomètres.
7. Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3% pour une distance de 100 kilomètres. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note u_n la puissance électrique (en MW) restant dans une ligne à très haute tension au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi u_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.
8. Jusqu'à présent Pierre n'a encore jamais réussi à économiser un seul euro. Pour le responsabiliser dans la gestion de son argent de poche, ses parents décident de lui verser 30 euros tous les premiers du mois. Pierre décide que pour s'offrir le téléphone de ses rêves qui coûte 150 euros, il ne dépensera chaque mois que 20% de son capital accumulé. Le premier versement lui a été fait au 1er janvier 2015. On note u_n le capital dont dispose Pierre juste après le n^{e} versement. Ainsi $u_1 = 30$ et u_5 correspond au capital acquis par Pierre le 1er mai 2015.

Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, pour $n \geqslant 1$, exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n.

1. $u_n = n+3$
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n+4}$
3. $u_n = n^2+1$.

Exercice 12 ⋆⋆ [Calculer]

On considère la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = 3 \times 4^{2n+1} + 1.$$

En simplifiant au maximum le résultat donner l'expression des termes suivants en fonction de n.

1. u_{n+2}
2. $u_n + 3$
3. u_{2n+1}
4. u_{4n+3}

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer la valeur de u_5.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \end{cases}$

Exercice 14 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer une expression de u_{n+2} en fonction de u_n.

1. $u_{n+1} = 5u_n$
2. $u_{n+1} = (u_n)^3$
3. $u_{n+1} = 5u_n + 3$
4. $u_{n+1} = nu_n$
5. $u_{n+1} = u_n + n + 1$

Exercice 15 ★★ [Modéliser, Représenter]

On note S_n la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.
Autrement dit, $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

1. Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, une expression de S_{n+1} en fonction de S_n.
2. En déduire un algorithme de calcul de S_{1000} en langage Python.

Exercice 16 ★★ [Calculer]

On considère la suite u définie par $u_n = -2 - 7n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4.
2. Montrer que la suite u vérifie la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n - 7.$$

Exercice 17 ★★ [Calculer]

On considère la suite v définie par $v_n = 3^{n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_0; v_1; v_2; v_3; v_4.
2. Montrer que la suite v vérifie la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 3v_n - 2.$$

Exercice 18 ★★ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_n = 3n + 2$
2. $u_n = n^2 - 3n + 12$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$
4. $u_n = \dfrac{2n+2}{5n+3}$
5. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n$
6. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0{,}3u_n$
7. $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n$
8. $u_n = \dfrac{n^2 + 5n + 6}{n+3}$
9. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

Exercice 19 ★ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = 5n - 2$
2. $u_n = -5n - 3$
3. $u_n = \dfrac{3n}{5}$
4. $u_n = (-2)^n$
5. $u_n = \dfrac{3}{n} - 3$
6. $u_n = \dfrac{4}{n+3}$
7. $u_n = \dfrac{4}{n+3} + \dfrac{2}{n^2}$
8. $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$
9. $u_n = \dfrac{n}{3} + (-1)^n$

Exercice 20 ⋆⋆ [Raisonner]

Pour chaque proposition indiquer si elle est vraie ou fausse. De plus, énoncer sa réciproque et indiquer également si elle est vraie ou fausse.

1. Si (u_n) est une suite strictement croissante, alors elle est croissante.
2. Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est monotone.
3. Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est constante.
4. Si (u_n) est une suite croissante et décroissante, alors elle est constante.
5. Si (u_n) est une suite strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21 ⋆⋆ [Chercher, Représenter]

La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout entier naturel n.

1. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement cette suite. Conjecturer son sens de variations et sa limite.
2. Prouver la conjecture sur le sens de variation de la suite.
3. Prouver que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.
4. Déterminer l'entier n_0 à partir duquel on a $u_n > 4{,}999$

Exercice 22 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 10$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, calculer les 20 premiers termes de la suite.
2. Conjecturer les sens de variations des suites (u_n) et (v_n) à partir du rang $n = 1$.
3. Conjecturer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 23 ⋆⋆ [Représenter]

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$ et $u_0 = -1$.

1. Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x + 1$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. Représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. En déduire graphiquement une valeur de u_4.

Exercice 24 ★★ [Représenter]

On considère la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \dfrac{3}{v_n + 1}$ et $v_0 = 1$.

1. Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. Représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. En déduire graphiquement une valeur de v_4.

Exercice 25 ★★★ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009. Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux. Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de $1,5\%$ par an pendant 5 ans.

1. Quelle était, en kilogrammes, la quantité de déchets produit en moyenne par habitant en 2009 dans la commune ?
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.
   (a) Montrer que $d_1 = 0,985 d_0$.
   (b) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
   (c) En déduire une expression de d_n en fonction de n
   (d) Conjecturer la limite de la suite d_n.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
N=0
d=400
while d>374:
   N=N+1
   d=0.985d
print(N)
```

Implémenter cet algorithme en Python. Quel est le résultat obtenu ? A quoi correspond-t-il ?

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Représenter, Calculer]

Dans un parc national, on étudie une espèce de renards. Cette population était de 1 240 renards à la fin de l'année 2016. On estime à 15% par an la baisse naturelle du nombre de renards. On suppose que cette baisse de 15% aura ensuite lieu chaque année.

1. On modélise par u_n le nombre de renards dans le parc régional à la fin de l'année $2016+n$. On a donc $u_0 = 1240$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Afin de préserver l'espèce, on décide en fait d'introduire à chaque année 30 renards à partir de la fin de l'année 2017. On note v_n le nombre de renards présents dans le parc à la fin de l'année $2016 + n$ (on a toujours $v_0 = 1240$).
   (a) Calculer v_1.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) Écrire un fonction algorithmique en langage Python permettant de calculer quel sera le nombre de renard à l'année $2016 + n$.
   (d) Tester l'algorithme de la question précédente pour différentes valeurs de n. Conjecturer la limite de la suite et interpréter le résultat.