

Polynômes du second degré – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★				16	1, 2, 3, 4, 7, 13, 19	
Exercices ★★		6, 26, 27, 28	23, 24	5, 17	5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 28	17
Exercices ★★★	11, 18, 30, 31, 32	32	31	29	11, 15, 18, 25, 29, 30, 31, 32	

Exercice 1 ★ [Calculer]

Calculer le déterminant de chaque polynôme ci-dessous.

- $3x^2 + 2x + 1$
- $2x^2 - 2x - 4$
- $-3x^2 + 2x - 5$
- $x^2 + x + 1$
- $x^2 - 7$
- $x - x^2 + 3$
- $7x - 3 + x^2$
- $1 - 3x^2$

Exercice 2 ★ [Calculer]

Déterminer la forme factorisée, lorsqu'elle existe, des polynômes suivants.

- $x^2 + 3x - 4$
- $2x^2 - 4x - 12$
- $-3x^2 + x - 5$
- $x^2 + x + 1$
- $x^2 - 2x + 1$
- $x - 4x^2 + 2$

Exercice 3 ★ [Calculer]

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

- $x^2 + x - 4 = 0$
- $3x^2 - x - 6 = 0$
- $x^2 - 10x + 25 = 0$
- $x^2 - 3x + 3 = 0$
- $x^2 - 1 = 0$
- $x - 4x^2 + 7 = 0$

Exercice 4 ★ [Calculer]

Déterminer les racines des polynômes suivants.

- $x^2 - x - 1$
- $x^2 - x$
- $-5x^2 + 7x + 12$
- $-3x - x^2 + 4$
- $3x^2 - 6x + 3$
- $-x + x^2 + 7$

Exercice 5 ★★ [Calculer, Raisonner]

Soit $m \in \mathbb{R}$.

On considère l'équation $x^2 - mx + m + 2 = 0$.
Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une unique solution ?

Exercice 6 ★★ [Calculer, Modéliser]

Déterminer deux entiers naturels consécutifs dont le produit est égal à 64 262.

Exercice 7 ★ [Calculer]

Les équations suivantes admettent toutes des racines. Dans chaque cas, déterminer le produit et la somme des racines.

1. $x^2 - x - 2$
2. $x^2 - \pi x$
3. $-x^2 + 3x + 12$
4. $3x + x^2 - 1$
5. $\sqrt{17}x^2 + 32x - 1$
6. $2x - 3x^2 + 5$

Exercice 8 ★★ [Calculer]

Déterminer deux réels x_1 et x_2 vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 ★★ [Calculer]

Existe-t-il des réels a et b vérifiant les conditions suivantes ?

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Si oui, déterminer lesquels.

Exercice 10 ★★ [Calculer]

Existe-t-il des réels a et b vérifiant les conditions suivantes ?

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 5 \end{cases}$$

Si oui, déterminer lesquels.

Exercice 11 ★★★ [Calculer, Chercher]

Soient les réels a et b les solutions de l'équation $2x^2 - 7x + 5 = 0$. Calculer $a^2 + b^2$.

Exercice 12 ★★ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée (facteur commun, identité remarquable, calcul avec le discriminant, racine évidente, *etc.*)

1. $x^2 + 4x = 0$
2. $\sqrt{2}x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $\pi x^2 + 2\pi x + \pi = 0$
4. $x^2 + x + 1 = 0$
5. $x^2 - x - 2 = 0$
6. $x^2 - 7 = 0$
7. $x^2 - 12x = -36$
8. $-3x^2 - 1 = 0$
9. $3x^2 + x - 2 = 0$
10. $7x^2 + x + 2 = 0$
11. $(x - 5)(x + 7) = 0$
12. $(x - 3)(x + 1) = 6$
13. $x^2 = \sqrt{2}$

Exercice 13 ★ [Calculer]

Déterminer le signe des polynômes suivants.

1. $(x - 1)(x - 4)$
2. $5x^2 - x - 1$
3. $x^2 + 3x - 1$
4. $x^2 + x + 3$
5. $-5x^2 + 3x + 11$
6. $x^2 - 8x + 16$
7. $-3x^2 + 8x - 11$

Exercice 14 ★★ [Calculer]Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1. $(x - 1)(x + 1) \geq 0$
2. $7x^2 + 3x \leq 0$
3. $2x^2 + x - 1 < 0$
4. $x^2 + x + 5 < 0$
5. $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$
6. $-3x^2 + 5x - 1 > 0$

Exercice 15 ★★★ [Calculer]Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

1. $\frac{x - 1}{x + 1} \geq x + 3$
2. $\frac{x^2 - 2}{x^2 + x + 1} < 0$
3. $\frac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 3} \leq 0$
4. $\frac{x + 1}{2x + 3} \geq -x + 2$

Exercice 16 ★ [Raisonner]

Dans tout l'exercice, f désigne la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Énoncer par ailleurs sa réciproque et indiquer également si elle est vraie ou fausse.

1. Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.
2. Si deux polynômes du second degré ont même racines, alors ils sont égaux.

Exercice 17 ★★ [Raisonner, Communiquer]

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$). Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors f admet nécessairement deux racines réelles.

Exercice 18 ★★★ [Calculer, Chercher]Étudier le signe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2x - 3| - 3}{|x| + 1}$$

Exercice 19 ★ [Calculer]Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes (définies sur \mathbb{R}).

1. $f_1(x) = x^2 + 3x + 1$
2. $f_2(x) = 5x^2 - x - 1$
3. $f_3(x) = x^2 - x$
4. $f_4(x) = 1 - 2x^2$
5. $f_5(x) = 7x - 2$
6. $f_6(x) = -5x^2 + 3x + 7$

Exercice 20 ★★ [Calculer]Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes (définies sur \mathbb{R}).

1. $f_1(x) = -\frac{x^2}{3} + \sqrt{2}$
2. $f_2(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{4}{5}$
3. $f_3(x) = (x - 2)(x - 6)$
4. $f_4(x) = -5(x - 1)(x + 9)$
5. $f_5(x) = -3x^2 - 3x - 1$
6. $f_6(x) = -(x + \sqrt{2})(x - \pi)$

Exercice 21 ★★ [Calculer]Résoudre dans \mathbb{R} les équations de degré trois suivantes

1. $x^3 + x - 2 = 0$
2. $3x^3 - x + 2 = 0$
3. $x^3 + 5x^2 + x = 0$
4. $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$
5. $x^3 - 3x - 2 = 0$

Exercice 22 ★★ [Calculer]

Résoudre dans \mathbb{R} les équations bicarrées suivantes

1. $x^4 + x^2 - 5 = 0$
2. $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$
3. $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$
4. $x^4 - 3x^2 + 7 = 0$
5. $x^4 - 2 = 0$

Exercice 23 ★★ [Calculer, Représenter]

Déterminer l'unique fonction f polynôme du second degré dont la courbe représentative passe par les points A(0;5), B(2;3) et C(-1;9).

Exercice 24 ★★ [Calculer, Représenter]

Déterminer l'unique fonction f polynôme du second degré dont la courbe représentative passe par les points A(0;3), B(1;7) et C(-3;5).

Exercice 25 ★★★ [Calculer, Représenter]

Déterminer l'unique fonction f polynôme du second degré dont la courbe représentative passe par les points A(4;1), B(10;-7) et C(-2;5).

Exercice 26 ★★ [Modéliser]

Une entreprise agricole produit du lait. Une étude statistique a permis d'estimer que le coût total de production (en €) est modélisé par la fonction C définie par :

$$C(x) = 3,54 \cdot 10^{-4} x^2 + 446,298x + 10,53$$

où x est le nombre de milliers de Litres produit annuellement, x étant compris entre 0 et 700. L'entreprise vend toute sa production au prix de 446,53€ les 1000 Litres. On note $B(x)$ le bénéfice de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre les recettes et le coût de production, pour la vente de x milliers de Litres de lait.

1. Montrer que :

$$B(x) = -3,54 \cdot 10^{-4} x^2 + 0,232x - 10,53.$$

2. Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?
3. Combien de milliers de litres de lait l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un bénéfice maximal ?

Exercice 27 ★★ [Modéliser]

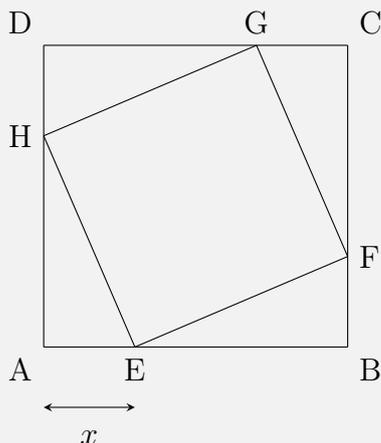
Sur route sèche, la distance d'arrêt d'une voiture est donnée par $D = \frac{v^2}{14} + 2v$ où v est la vitesse de la voiture au début du freinage (exprimée en m.s⁻¹).

1. Si une voiture roule à 130km.h⁻¹, quel sera la distance d'arrêt (arrondir au mètre près) ?
2. À quel intervalle doit appartenir la vitesse (en km.h⁻¹) pour que la distance d'arrêt soit inférieur à 100 m (arrondir à l'unité près) ?

Exercice 28 ★★ [Modéliser, Calculer]

On considère un carré ABCD de côté 1. EFGH est un carré tel que :

- Les points E, F, G, H appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
- $AE = BF = CG = DH = x$ avec $0 \leq x \leq 1$.



1. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du carré EFGH. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du carré EFGH est minimale.

Exercice 29 ★★★ [Calculer, Reasonner]

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{3x+1} = x$
2. $\sqrt{x-1} = 2x$
3. $7\sqrt{2x+5} = x-1$
4. $\sqrt{x^2+5x-3} = \sqrt{x}$
5. $\sqrt{x^2+x+1} = 3\sqrt{x}$
6. $\sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{x}$

Exercice 30 ★★★ [Calculer, Chercher]

On appelle « nombre d'or » et on note ϕ la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

En utilisant la calculatrice, calculer la valeur exacte de ϕ^{32} .

Exercice 31 ★★★ [Calculer, Chercher, Représenter]

Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}^+$ existe-t-il un rectangle tel que son aire et son périmètre soient égaux à k ?

Exercice 32 ★★★ [Modéliser, Chercher, Calculer]

La distance Terre-Lune est d'environ 384 000 kilomètres. La masse de la Terre est de $5,97 \times 10^{24}$ kg et celle de la Lune est de $7,35 \times 10^{22}$ kg. Déterminer en quelle(s) position(s) de l'axe Terre-Lune doit se trouver un astéroïde pour que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur l'astéroïde et la force gravitationnelle exercée par la Lune sur l'astéroïde se compensent ?