

Chapitre 1

Polynômes du second degré

Table des matières

1	Factorisation des polynômes du second degré	2
2	Racines d'un polynôme du second degré	2
3	Signe d'un polynôme du second degré	5
4	Variations d'un polynôme du second degré	6
5	Complément sur les équations de degré supérieur	8
5.1	Équations de degré 3	8
5.2	Équations de degré 4	9

1 Factorisation des polynômes du second degré

Dans tout ce chapitre, a , b et c désignent des réels avec $a \neq 0$.

Définition 1

On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ le nombre réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Proposition 1 – (admise)

On considère le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$, en posant $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$, en posant $x_0 = -\frac{b}{2a}$, on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable comme produit de deux polynômes de degré 1.

2 Racines d'un polynôme du second degré

Définition 2

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Proposition 2

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) où l'inconnue est $x \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.



Démonstration.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la démonstration de la propriété 2 :

- Si $\Delta > 0$,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\text{avec } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

En utilisant la règle du produit nul :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\iff x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0. \\ &\iff x = x_1 \text{ ou } x = x_2. \\ &\iff x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

$$\text{avec } x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

En utilisant la règle du produit nul :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a(x - x_0)^2 = 0 \\ &\iff x - x_0 = 0 \\ &\iff x = \frac{-b}{2a} \end{aligned}$$

- On admettra que si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution. □

Exemple.

Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Solution :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Ainsi, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$



Proposition 3 – Relations coefficients/racines

Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (avec éventuellement $x_1 = x_2$), alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ \text{et} & \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Comme x_1 et x_2 sont les racines de f , on sait que f se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

En développant, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2) &= b \\ \text{et} & \\ ax_1x_2 &= c \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ \text{et} & \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

□

Exemple.

Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ en commençant par remarquer que 1 est une racine « évidente ».

Solution :

1 est une racine évidente car $1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0$.

Comme on sait que le produit des racines $x_1 \times x_2 = 5$, on en déduit que $x_2 = \frac{5}{x_1} = 5$ est la deuxième racine.



3 Signe d'un polynôme du second degré

Proposition 4

Le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et de Δ :

	$a > 0$	$a < 0$																						
$\Delta > 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0	+	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																				
$f(x)$	+	0	-	0	+																			
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																				
$f(x)$	-	0	+	0	-																			
$\Delta = 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>x_0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-						
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																					
$f(x)$	+	0	+																					
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																					
$f(x)$	-	0	-																					
$\Delta < 0$	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td colspan="2">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	+		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td colspan="2">-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	-											
x	$-\infty$	$+\infty$																						
$f(x)$	+																							
x	$-\infty$	$+\infty$																						
$f(x)$	-																							

Démonstration.

La démonstration découle directement de la factorisation des polynômes (propriété 2).

Par exemple, dans le cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$:

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
a	+	+	+	+	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$a(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+

Les autres cas se traitent de la même manière. □

Exemple.

Résoudre l'inéquation $2x^2 - 5x + 1 < 0$.

Solution :

On cherche les racines de $2x^2 - 5x + 1$:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 17 > 0.$$

Ainsi, les deux racines sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

Par ailleurs, comme $a = 2 > 0$, le tableau de signe du polynôme est le suivant :



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$		$+$	$-$	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left] \frac{5 - \sqrt{17}}{4} ; \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \right[$.

4 Variations d'un polynôme du second degré

Proposition 5 – (admise)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		$f(\alpha)$	

(Diagramme de variations pour $a > 0$: la courbe descend de $-\infty$ à α et monte de α à $+\infty$.)

- Si $a < 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		$f(\alpha)$	

(Diagramme de variations pour $a < 0$: la courbe monte de $-\infty$ à α et descend de α à $+\infty$.)

Exemple.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Déterminer les variations de f .

Solution :

$$\text{On a } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{De plus, } f(\alpha) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{2}\right) + 4 = \frac{7}{4}.$$

Ainsi, comme $a = 1 > 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{7}{4}$	

(Diagramme de variations pour $a > 0$: la courbe descend de $-\infty$ à $\frac{3}{2}$ et monte de $\frac{3}{2}$ à $+\infty$.)



Définition 3

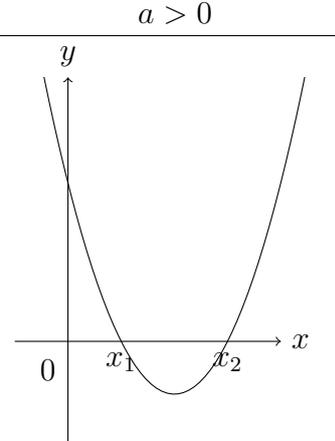
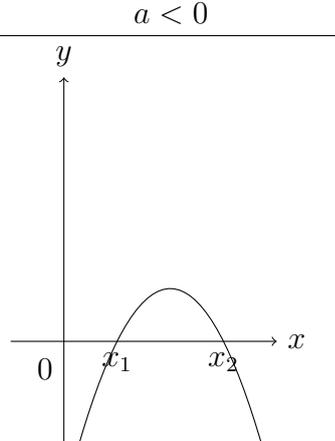
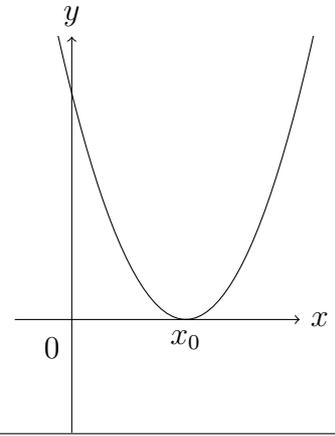
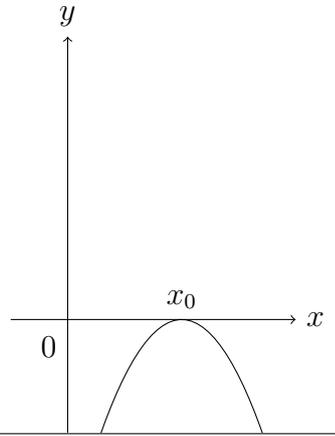
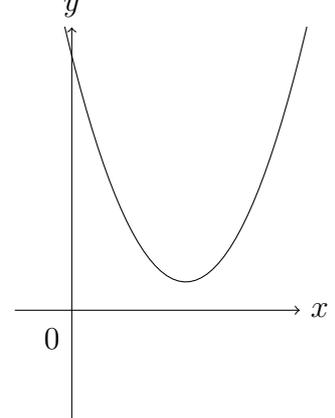
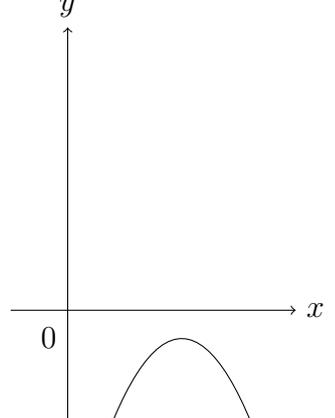
Le point de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ est appelé le **sommet** de la parabole représentative de la fonction f .

Exemple.

Si f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 4$, le point $M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$ est le sommet de la parabole.

Remarque.

On peut résumer la situation des racines et du signe d'un polynôme du second degré par le tableau suivant :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ (deux racines)		
$\Delta = 0$ (une racine)		
$\Delta < 0$ (pas de racine)		

5 Complément sur les équations de degré supérieur

5.1 Équations de degré 3

La résolution générale des équations de degré 3 n'est pas au programme de première. En revanche, il est possible de résoudre une équation de degré 3 lorsqu'on connaît déjà une des solutions.

Méthode – Résoudre une équation de degré 3 de la forme
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- Déterminer une racine « évidente » x_1 .
- Chercher des réels a, b, c tels que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ax^2 + bx + c)$$

- Pour trouver u, v, w , développer le produit et on identifie les coefficients termes à termes des deux polynômes.
- Finir la résolution en résolvant $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemple.

Résoudre l'équation (E) : $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.

Solution :

1 est une racine évidente.

On va donc factoriser l'équation par $(x - 1)$, c'est-à-dire qu'on cherche $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Or,

$$\begin{aligned} (x - 1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - a &= 4 \\ c - b &= 0 \\ -c &= -5 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve : $a = 1$, $b = 5$ et $c = 5$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 5x + 5)$. On a donc

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 2 = 0 &\iff (x - 1)(x^2 + 5x + 5) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 5x + 5 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de $x^2 + 5x + 5$: $\Delta = 5$.

Les deux solutions de $x^2 + 5x + 5 = 0$ sont donc $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ 1; \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$



5.2 Équations de degré 4

La résolution générale des équations de degré 4 n'est pas au programme de première. En revanche, il est possible de résoudre une équation dans un cas particulier : celui d'une équation bicarrée.

Méthode – Résoudre une équation de degré 4 de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (équation bicarrée)

- Poser $y = x^2$
- Résoudre l'équation $ay^2 + by + c = 0$
- En déduire les racines de l'équation bicarrée.

Exemple.

Résoudre l'équation (E) : $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2$.

On a l'équivalence :

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff y^2 - y - 1 = 0$$

On résout l'équation $y^2 - y - 1 = 0$:

$\Delta = 5$. L'équation admet deux solutions : $y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi,

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\text{impossible}) \end{cases}$$

$$\iff x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} ; -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \right\}$.



Savoir-faire du chapitre

- Résoudre une équation du second degré en diversifiant les stratégies : discriminant, identités remarquables, racines évidentes, formule de la somme et du produit des racines.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre une équation de degré 3 lorsque l'on connaît une racine évidente.
- Résoudre une équation bicarrée (de degré 4).
- Déterminer une fonction polynôme du second degré passant par trois points donnés du plan.

**QCM
d'entraînement**