Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 13
Fonctions trigonométriques

Table des matières

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

1. La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition 1

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Démonstration.
En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que les réels x et $x + 2\pi$ ont le même point image sur le cercle. Par conséquent, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. □

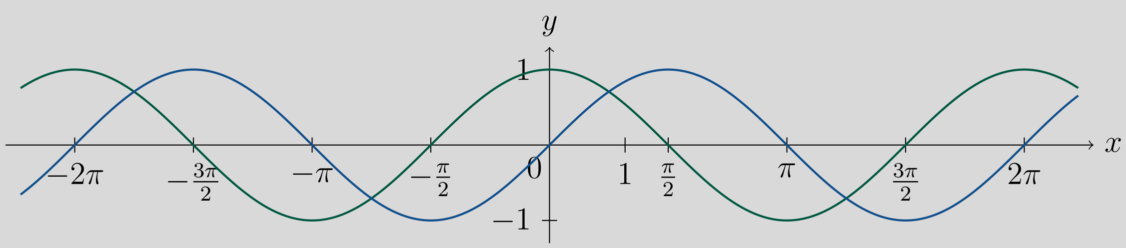
Proposition 2

1. La fonction cosinus est paire.
2. La fonction sinus est impaire.

Démonstration.
En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Cela traduit exactement le fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire. □

Proposition 3

Les courbes des fonctions cosinus et sinus sont représentées ci-dessous.



1. Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques, leur courbe représentative sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction cosinus étant paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. La fonction sinus étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 2

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des **sinusoïdes**.

2 Étude des fonctions trigonométriques

Remarque.
Pour connaître les courbes des fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de les connaître sur $[0\,;\pi]$. On obtient ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ par le procédé suivant :

- On trace les courbes sur $[-\pi\,;\pi]$ en utilisant les symétries dues au fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.
- On trace ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ en utilisant la périodicité des fonctions cosinus et sinus.

On restreint ainsi l'étude qui suit à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Proposition 4

Les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ sont :

x	0		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Démonstration.
Les variations des fonctions cosinus et sinus se déduisent directement du cercle trigonométrique. □

Proposition 5

Les tableaux de signe des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ sont :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		π
$\sin(x)$	0	$+$	0

Démonstration.
Le signe des fonctions cosinus et sinus se déduit directement du cercle trigonométrique. □

Remarque.
Les changements de variations de la fonction cosinus se produisent au même moment que les changements de signe de la fonction sinus et inversement. Cela s'explique par la propriété suivante :

Proposition 6 – (admise)

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Étudier la périodicité d'une fonction.
- Étudier la parité d'une fonction.
- Étudier des fonctions trignonométriques (signes, dérivées, variations).