Fonction exponentielle – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆					1, 2, 3, 4, 5	
Exercices ⋆⋆		11, 12	8, 9, 10, 11, 13	7, 13	7, 9, 10, 11, 12, 13	
Exercices ⋆⋆⋆	14, 15		14, 15	14	6, 15	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $\exp(5) \times \exp(7)$
2. $(\exp(5))^2$
3. $\exp(2) + \exp(1)$
4. $\exp(2) \times (\exp(1))^3$
5. $3\exp(2)$
6. $\dfrac{\exp(4) \times (\exp(2))^2}{\exp(5)}$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $\exp(x) \times \exp(2x)$
2. $3\,(\exp(x))^2$
3. $\exp(2x) + \exp(1)$
4. $(\exp(x))^3 \times (\exp(-x))^2$
5. $4\exp(-x)\exp(5x)$
6. $\dfrac{\exp(x) \times (\exp(3x))^2}{\exp(8x)}$

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer $f'(x)$.

1. $f : x \longmapsto e^x + x^2 - 5$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-1}$
3. $f : x \longmapsto e^{3x+1}$
4. $f : x \longmapsto e^{-2x+5}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^{-x+1}}$

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{x-4} = e^{3x}$
2. $e^{5x+2} = e$
3. $e^{-3x} = 1$
4. $e^{-3x^2} = \dfrac{1}{e}$
5. $e^x + 1 = 0$
6. $(x^2 - 2)e^{x-3} = 0$
7. $(e^{-x+1} - 1)(e^{3x} + e) = 0$
8. $-e^{3x} = e^{-3x}$

Exercice 5 ⋆ [Calculer]

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x+5} \leqslant e^{2x}$
2. $e^{5x+2} \leqslant 1$
3. $e^{-3x+1} > \dfrac{1}{e^{-x^2}}$
4. $\dfrac{3x-1}{e^{2x}} < 0$
5. $e^{-2x+6} \leqslant 0$
6. $e^{x+4} \geqslant \dfrac{-3}{e^{5x}}$

Exercice 6 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} - e^{x} = 0$
2. $2e^{2x} + 2e^{x} = 4$
3. $e^{4x} + e^{2x} + 1 = 0$
4. $2e^{x} + 4 - 6e^{-x} = 0$

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

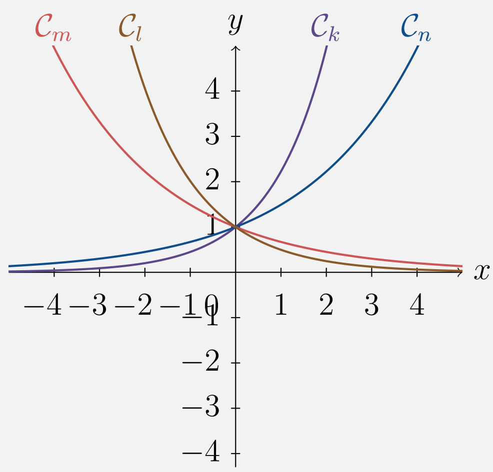
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$. Montrer que f est strictement croissante si, et seulement si, $a > 0$.

Exercice 8 ⋆⋆ [Représenter]

On considère quatre fonctions k, l, m et n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} k(x) = e^{ax} & l(x) = e^{bx} \\ m(x) = e^{cx} & n(x) = e^{dx} \end{array}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels. On donne par ailleurs les courbes représentatives de k, l, m et n ci-dessous.



Classer par ordre croissant les réels a, b, c et d.

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Étudier chacune des fonctions suivantes (parité, signe, variations) puis représenter, à main levée, sa courbe représentative.

1. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{x} - 1$
2. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2}$
3. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{3x+1}$
4. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1-5x)e^{x}$
5. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1+x)e^{-x+2}$
6. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (e^{x})^2 + 5$
7. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^2-5x-1)e^{-x}$
8. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^{x}}{x}$

Exercice 10 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 6e^{x} - 8x - 4.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$.
2. Étudier le signe f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point en commun ? Justifier.

Exercice 11 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Une entreprise fabrique des pièces en acier, toutes identiques, pour l'industrie aéronautique. Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25°C. Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600°C et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500°C. La température de ces pièces varie en fonction du temps. On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(t) = 1375e^{-0{,}075t} + 25,$$

où t correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1. Calculer la température des pièces à la sortie du four.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3. Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4. On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.
   (a) Compléter l'algorithme donné ci-dessous pour qu'il renvoie ce temps minimum d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

```
from math import *
def f(t):
    return 1375*exp(-0.075*t)+25

def seuil():
    t=...
    temperature=....
    while temperature >=....:
        t=t+0.1
        temperature=....
    return t
```

   (b) Déterminer ce temps minimum d'attente. On arrondira au dixième.

Exercice 12 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de $x$centaines de litres est donné par la fonction R définie sur l'intervalle $[2\,;20]$ par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}.$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (c'est-à-dire un déficit).
3. Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. On note R' la dérivée de la fonction R. Montrer que pour tout $x \in [2\,;20]$:
$$R'(x) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}.$$
5. En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Exercice 13 ⋆⋆ [Raisonner, Représenter, Calculer]

1. (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
   (b) Tracer dans un repère la courbe de la fonction exponentielle ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.
2. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = e^x - x - 1.$$
   (a) Déterminer les variations puis le signe de la fonction f.
   (b) En déduire que la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 14 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner, Représenter]

Est-il vrai que la courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de toutes ses tangentes ? Justifier.

Exercice 15 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer, Représenter]

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$$

et

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x}.$$

On considère de plus un réel a quelconque. Montrer que les tangentes respectives aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisses a sont perpendiculaires.