Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 12
Fonction exponentielle

Table des matières

1 Définition de la fonction exponentielle et première propriété

Proposition 1 – (admise)

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et telle que $f(0) = 1$.

Définition 1

L'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et telle que $f(0) = 1$ est appelée la **fonction exponentielle** et est notée exp.

Proposition 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration.
On note $f = \exp$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

Ainsi, on en déduit que g est une fonction constante et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1.$$

Finalement, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et donc $\exp(x) \neq 0$. □

2 Propriétés algébriques

Proposition 3

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration.
On considère un nombre réel y fixé.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
Alors g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (d'après la Proposition 2). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0.$$

On en déduit que g est une fonction constante et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = \exp(y)$.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ d'où le résultat. □

Proposition 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Démonstration.

- Le premier point a déjà été démontré dans la preuve de la Proposition 2. On peut également le démontrer en appliquant la Proposition 3, en prenant $y = -x$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \exp(x) \times \exp(-x) & = & \exp(x - x) \\ & = & \exp(0) \\ & = & 1 \end{array}$$

- Le deuxième point découle directement du premier.

□

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration.
On considère un réel x fixé.
On va distinguer les cas si n est positif ou si n est négatif.

- On commence par démontrer que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - Pour $n = 0$, $\exp(0x) = 1$ et $(\exp(x))^0 = 1$ donc l'égalité est vraie.
  - Pour $n = 1$, $\exp(1x) = \exp(x)$ et $(\exp(x))^1 = \exp(x)$ donc l'égalité est vraie.
  - Pour $n = 2$, $\exp(2x) = \exp(x + x) = \exp(x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^2$ donc l'égalité est vraie.
  - Pour $n = 3$, $\exp(3x) = \exp(2x + x) = (\exp(x))^2 \times \exp(x) = (\exp(x))^3$ donc l'égalité est vraie.
  - Supposons que l'égalité soit vraie pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\exp(n_0 x) = [\exp(x)]^{n_0}$. On va alors montrer qu'elle est vraie pour n_0+1. En fait, $\exp((n_0+1)x) = \exp(n_0 x + x) = \exp(n_0 x) \times \exp(x) = (\exp(x))^{n_0} \times \exp(x) = (\exp(x))^{n_0+1}$ et l'égalité est donc vraie pour $n_0 + 1$.

  Ainsi, on a prouvé que l'égalité est vraie pour $n = 0$ et que si elle est vraie pour un entier n_0 alors elle est vraie pour l'entier $n_0 + 1$. De proche en proche, on en déduit que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On suppose maintenant que $n < 0$. Dans ce cas, $-n$ est positif donc on peut appliquer l'égalité précédente. On obtient ainsi que $\exp(-nx) = (\exp(x))^{-n}$. Or, comme on sait que $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)}$ et que $(\exp(x))^{-n} = \dfrac{1}{(\exp(x))^n}$, on en déduit que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

□

3 Le nombre e

Définition 2

On note $e = \exp(1)$. Le nombre e est appelé **constante d'Euler**.

Remarque.
On admettra que $e \notin \mathbb{Q}$ et que $e \simeq 2,718$.

Proposition 6

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad e^n = \exp(n)$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \exp(n) &= \exp(n \times 1) \\ &= (\exp(1))^n \quad \text{d'après la Proposition ??} \\ &= e^n \quad \text{par définition de } e. \end{aligned}$$

□

Définition 3

Par extension de la Proposition 6, on définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^x = \exp(x)$.

Remarque.
A priori, élever un nombre à la puissance x n'a pas de sens si $x \notin \mathbb{Z}$. La défintion précédente donne un sens à une telle puissance uniquement dans le cas de e^x. Il est possible de définir de manière générale a^x avec $a > 0$ mais cela n'est pas au programme de première.

Proposition 7

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Démonstration.
Ces égalités sont simplement les Propositions 3, 4 et **??** réécrites en utilisant le fait que $e^x = \exp(x)$. □

Méthode – Simplifier une expression contenant des exponentielles

1. Transformer les exponentielles en puissances de e à l'aide de la formule $\exp(x) = e^x$
2. Utiliser les propriétés sur les puissances (Proposition 7)

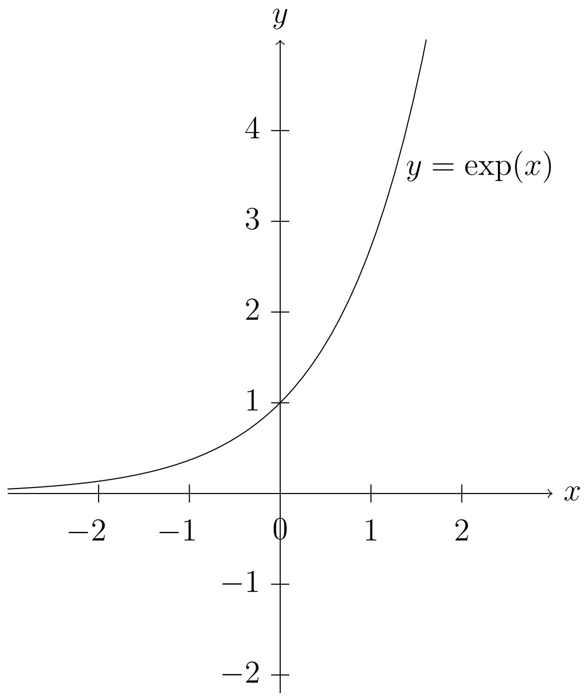
Exemple.

Simplifier l'expression $\dfrac{\exp(8) \times (\exp(2))^3}{\exp(5)}$.

Solution :

$$\frac{\exp(8) \times (\exp(2))^3}{\exp(5)} = \frac{e^8 \times (e^2)^3}{e^5} = \frac{e^8 \times e^6}{e^5} = \frac{e^{14}}{e^5} = e^9 = \exp(9)$$

4 Étude de la fonction exponentielle



Proposition 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \exp(x) > 0$.

Démonstration.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp(x) = e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2.$$

Le carré d'un nombre réel est toujours positif donc $\exp(x) \geqslant 0$ et comme on sait que $\exp(x) \neq 0$, on en déduit le résultat. $\square$

Proposition 9

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Par définition, exp est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))' = \exp(x)$. Comme $\exp(x) > 0$, on en déduit que exp est strictement croissante. $\square$

Méthode – Étudier les variations d'une exponentielle

On dérive la fonction et on étudie le signe de la dérivée.

Pour cela, on peut utiliser deux propriétés :
- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $g : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable et pour tout x, $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Exemple.
Etudier les variations de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(-3x+7)$.

Solution :
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3\exp(-3x+7)$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-3x+7) > 0$ donc $g'(x) < 0$.
Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
- $a \leqslant b \Longleftrightarrow exp(a) \leqslant \exp(b)$
- $a \geqslant b \Longleftrightarrow exp(a) \geqslant \exp(b)$
- $a = b \Longleftrightarrow exp(a) = \exp(b)$

Démonstration.
- Si $a \leqslant b$ alors, comme la fonction exponentielle est croissante, $\exp(a) \leqslant \exp(b)$. Réciproquement, supposons que $\exp(a) \leqslant \exp(b)$. On souhaite montrer que $a \leqslant b$. Supposons par l'absurde que $a > b$. Comme exp est strictement croissante, on aurait $\exp(a) > \exp(b)$, ce qui est une contradiction.
- Il suffit d'intervertir a et b dans la première proposition.
- D'après les deux premiers points, on peut écrire :

$$a = b \Longleftrightarrow a \leqslant b \text{ et } a \geqslant b \Longleftrightarrow \exp(a) \leqslant \exp(b) \text{ et } \exp(a) \geqslant \exp(b) \Longleftrightarrow \exp(a) = \exp(b).$$

□

Remarque.
On peut démontrer ce genre de propriété pour n'importe quelle fonction strictement croissante. Attention néanmoins, la preuve de la réciproque a bien nécessité la stricte croissance de la fonction. En général, si f est croissante, on ne peut pas écrire que $f(a) \leqslant f(b) \Longrightarrow a \leqslant b$. Par exemple, si f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, on a : $f(2) \leqslant f(1)$ et pourtant $2 > 1$.

Méthode – Résoudre des équations ou des inéquations

- On utilise les propriété algébriques afin de se rammener à des équations du type $e^a = e^b$ ou $e^a \leqslant e^b$.
- On applique ensuite la Proposition 10.

Exemple.
Résoudre $e^{-2x+1} \leqslant 1$

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{-2x+1} \leqslant 1 &\iff e^{-2x+1} \leqslant e^0 \\ &\iff -2x+1 \leqslant 0 \\ &\iff x \geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Savoir-faire du chapitre

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Étudier le comportement de fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle.
- Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle.
- Modéliser une situation à l'aide de la fonction exponentielle.

QCM d'entrainement