Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 11
Dérivation et applications

Table des matières

1 Étude des variations

Proposition 1 – (admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I.
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.

Proposition 2 – (admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f' est strictement positive sur I sauf pour un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante.
- Si f' est strictement négative sur I sauf pour un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante.

Méthode – Déterminer les variations d'une fonction

- Calculer la dérivée ;
- Étudier le signe de $f'(x)$;
- En déduire les variations de f.

Exemple.
Étudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$.

Solution :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, f' ne s'annule que pour $x = 0$ donc f est en fait strictement croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

Exemple. Étudier le sens de variation de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -x^3 + 3x + 5$.

Solution :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 3$.
On étudie le signe de f' afin d'en déduire les variations de f :
Pour cela, on commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
$x_1 = 1$ est une racine évidente de $-3x^2 + 3 = 0$.
Le produit des racines est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-3}{3} = -1$ donc la seconde racine est $x_2 = -1$.

Par ailleurs, comme $a = -3 < 0$, on en déduit le signe de f' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^3 + 3 \times (-1) + 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^3 + 3 \times 1 + 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

2 Étude des extrema

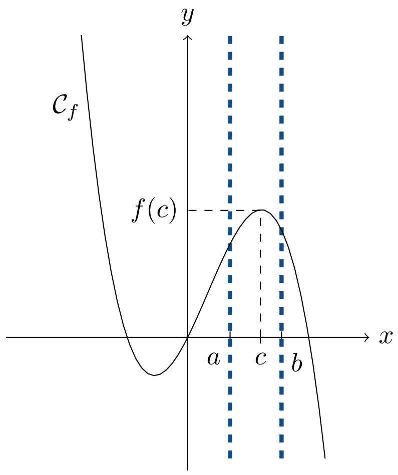
Définition 1 – (Rappel)

Soit I un intervalle et c un réel de I. On considère une fonction f définie sur I.
On dit que $f(c)$ est un **maximum global** sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(c)$.
On dit que $f(c)$ est un **minimum global** sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(c)$.

Définition 2

Soit I un intervalle et c un réel de I. On considère une fonction f définie sur I.

- Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f signifie qu'il existe un intervalle $]a;b[$ contenant c (avec $a \neq b$) et tel que pour tout $x \in]a;b[$, $f(x) \leqslant f(c)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(c)$).
- Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.

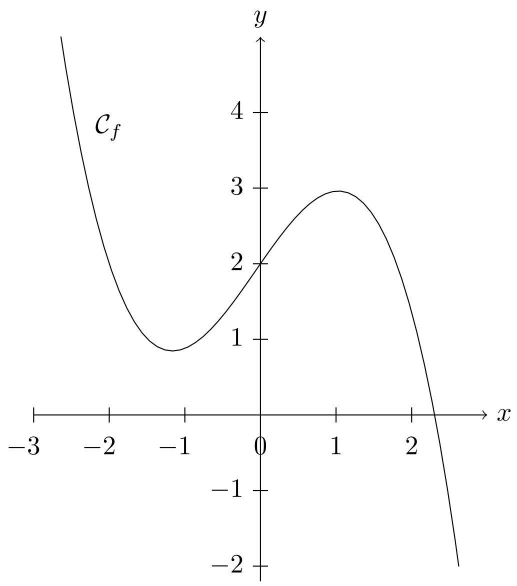


Proposition 3 – (admise)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I.
- Si $f(c)$ est un maximum global, alors $f(c)$ est un maximum local.
- Si $f(c)$ est un minimum global, alors $f(c)$ est un minimum local.

Remarque.
Les réciproques sont fausses !

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la fonction dont la courbe est représentée ci dessous. $f(1) = 3$ est ici un maximum local mais n'est pas un maximum global.

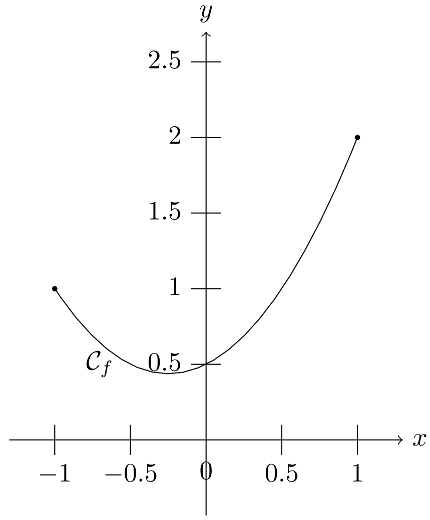


Proposition 4 – (admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
- Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.
- Si f' s'annule en changeant de signes alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Remarque.

- L'hypothèse que l'intervalle I soit ouvert est indispensable.
  Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la fonction f définie sur $[-1;1]$ et dont la courbe est représentée ci-dessous. Cette fonction admet un maximum atteint en $x = 1$ mais $f'(1) \neq 0$.



- L'hypothèse $f'(c) = 0$ n'est pas suffisante pour avoir un extremum local.
  Par exemple, si $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0.

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Étudier les variations d'une fonction.
- Déterminer des extremums locaux et globaux.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir des inégalités.