Nombre dérivé et Fonction dérivée – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆			4, 5, 6, 7, 12		8, 9, 12, 13	
Exercices ⋆⋆			10, 11, 16	1, 2, 3, 17	1, 2, 3, 10, 14, 15, 16, 17	
Exercices ⋆⋆⋆	21		19, 21	18, 20	18, 19, 20, 21	

Exercice 1 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.
2. Montrer que f est dérivable en -2 et calculer $f'(-2)$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à la calculatrice et vérifier graphiquement les résultats des questions précédentes.

Exercice 2 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

.

1. Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à la calculatrice et vérifier graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice 3 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

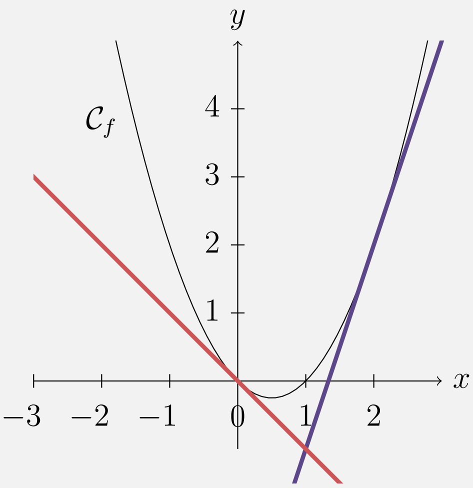
$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

.

1. Montrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à la calculatrice et vérifier graphiquement le résultat de la question précédente.

Exercice 4 ⋆ [Représenter]

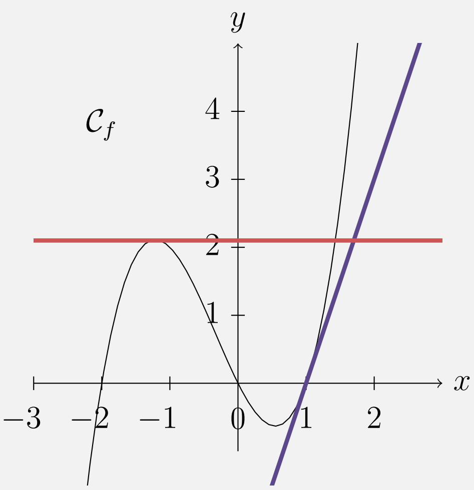
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = 0$ et $a = 2$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 (en rouge) et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 (en vert).



Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$.

Exercice 5 ⋆ [Représenter]

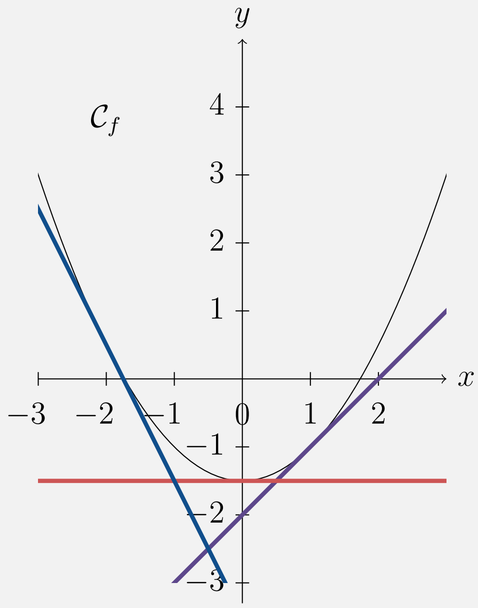
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = -1$ et $a = 1$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 (en rouge) et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 (en vert).



Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(1)$.

Exercice 6 ⋆ [Représenter]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = -1$ et $a = 1$. On donne ci$_dessous la courbe$\mathcal{C}_f$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Déterminer graphiquement les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -2, 0 et 1.

Exercice 7 ⋆ [Représenter]

Pour chaque fonction, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice puis déterminer graphiquement l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. $f(x) = -x^3 + 5x + 7$ et $a = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x}{3+8x}$ et $a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{3x+7}$ et $a = 3$
4. $f(x) = \dfrac{2x+7}{\sqrt{x}}$ et $a = 2$.

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On admet que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = \frac{1}{4}$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. En calculant le taux de variations, montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.
2. En déduire l'équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Étudier la position relative de la tangente par T_1 par rapport à $\mathcal{C}_f$.
4. En procédant comme précédemment, déterminer l'équation de la tangente T_{-1} à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1. Que peut-on dire des droites T_1 et T_{-1} ?

Exercice 11 ⋆⋆ [Représenter]

On considère une fonction f définie sur $[-3\,;3]$ et dérivable pour tout réel a de l'intervalle $[-3\,;3$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-1	0,5	2	3
$f(x)$	0	1	0,5	3	-2
$f'(x)$	2	0	-1	-1	0

Exercice 12 ⋆ [Représenter, Calculer]

Pour chaque fonction f, justifier qu'elle est dérivable en a et déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$ et $a = 4$
2. $f(x) = x^5$ et $a = -1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 3$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = -6$
5. $f(x) = x^3$ et $a = 7$

Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité en justifiant puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

1. $f(x) = 5x + 3$
2. $f(x) = -6$
3. $f(x) = x^2 + x$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $f(x) = -5x^2 + 3x + 5$
6. $f(x) = x^3 - 3x$
7. $f(x) = \frac{x^5}{4} + \frac{x}{3} + \pi$
8. $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^4}{4}$
9. $f(x) = \frac{5}{x} - x$
10. $f(x) = \sqrt{x} + 5x$
11. $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \sqrt{3}x$
12. $f(x) = \frac{3\sqrt{x} + 1}{5}$

Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité en justifiant puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

1. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
5. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+3}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}+1\right)x^2$
7. $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+5}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$
9. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$
11. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x-5}$
12. $f(x) = \dfrac{5}{1-x}$

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité en justifiant puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

1. $f(x) = \sqrt{2x-4}$
2. $f(x) = (3x+1)^2$
3. $f(x) = \left(\dfrac{5}{2}x+3\right)^4$
4. $f(x) = \sqrt{1+3x}$
5. $f(x) = (x^2-2)\sqrt{2x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+7}}$

Exercice 16 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$). On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. On considère par ailleurs deux points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives α et β telles que $\alpha \neq \beta$.

1. (a) Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A est :
$$y = (2a\alpha+b)x + c - a\alpha^2.$$
   (b) Déterminer de même l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point B.
2. Démontrer que ces tangentes se coupent en un point d'abscisse $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
   (a) Vérifier que :
$$f(\beta)-f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).$$
   (b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ est parallèle à la droite (AB).
3. Faire une figure illustrant le résultat démontré dans cet exercice.

Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 puis en déduire $f'(0)$.
3. D'après le cours, si f et g sont deux fonctions dérivables en a, alors $f \times g$ est dérivable en a. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 18 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+6|$. Étudier la dérivabilité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆ [Calculer, Représenter]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 7x - 4$. La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x + 4$? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

Exercice 20 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1. Factoriser le polynôme $f(x)$.
2. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = |f(x)|.$$
   (a) Justifier que g est dérivable sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à cet intervalle.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $]-3\,;2[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à cet intervalle.
   (c) Étudier la dérivabilité de g en -3 et en 2.

Exercice 21 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer, Représenter]

On note f la fonction carrée et g la fonction inverse. Déterminer les tangentes communes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.