Lycée Lucie Aubrac - 1re

Chapitre 10
Nombre dérivé
et Fonction dérivée

Table des matières

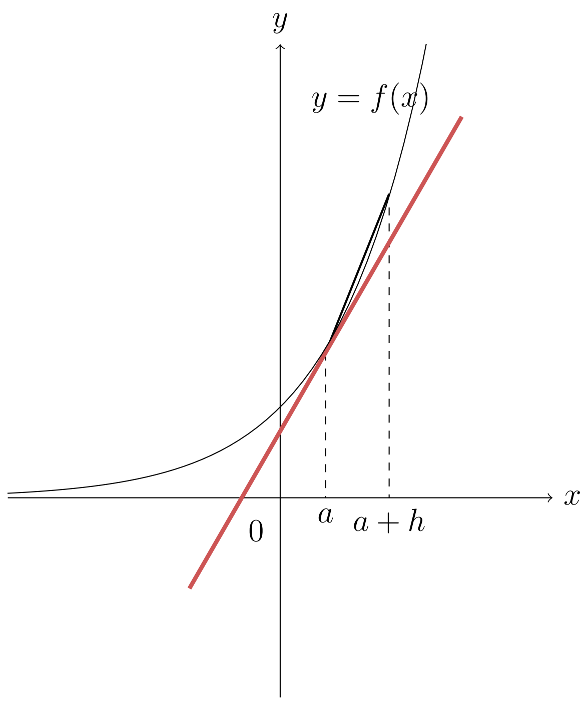
1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Dans toute la suite de ce chapitre, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction où I est un intervalle et $a \in I$. $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1 Définition du nombre dérivé en un point

Définition 1

- Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, la quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est appelée taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.
- Si le taux d'accroissement tend vers un réel, lorsque h tend vers 0 (avec $h \neq 0$), on dit que f est dérivable en a et on appelle **nombre dérivé** de f en a ce réel. On le note $f'(a)$.
  On écrit :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$



Exemple.
On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x^2 + x - 2$.
Montrer que f est dérivable en $a = 1$ et déterminer $f'(1)$.

Solution :
Soit $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(2(1+h)^2+(1+h)-2)-(2\times 1^2+1-2)}{h} \\
&= \frac{2(1+2h+h^2)+(1+h)-2-1}{h} \\
&= \frac{5h+2h^2}{h} \\
&= \frac{h\,(5+2h)}{h} \\
&= 5+2h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 5
\end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1)=5$.

Remarque.
Attention ! $f'(a)$ n'existe pas toujours. Pour certaines fonctions, et pour certaines valeurs de a, il se peut que le taux d'accroissement ne tende pas vers un nombre réel (voir partie 1.3).

1.2 Tangente à une courbe en un point

Définition 2

Si f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a la droite T passant par le point $\mathrm{A}\,(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque.
Attention ! Si f n'est pas dérivable en a, il n'est *a priori* pas possible de parler de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Proposition 1

Soit f une fonction dérivable en a.
L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Démonstration.
Soit f une fonction dérivable en a.
Par définition, le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $f'(a)$.
Ainsi, T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.
Par ailleurs, on sait que le point $A\,(a; f(a))$ appartient à T. On obtient donc l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& f(a) &= f'(a)a + p \\
\iff\ & p &= f(a) - f'(a)a
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation de T est :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\
y &= f'(a)(x-a) + f(a)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple.
On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x^2 + x - 2$.
Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Solution :
On a $f(1) = 2 \times 1^2 + 1 - 2 = 1$.
Par ailleurs, on a montré que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 5$ (voir page 2).
Ainsi, l'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} T : \quad y = &\quad f'(a)(x-a) + f(a) \\ y = &\quad f'(1)(x-1) + f(1) \\ y = &\quad 5 \times (x-1) + 1 \\ y = &\quad 5x - 4 \end{aligned}$$

1.3 Exemples de fonctions non dérivables en un point

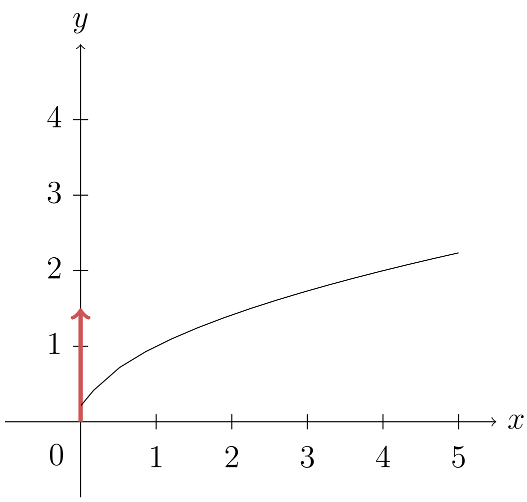
Fonction racine carrée en $a = 0$

Soit $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{x}$.
Montrons que f n'est pas dérivable en $a = 0$.
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et donc f n'est pas dérivable en 0.

Remarque.
Géométriquement, la non-dérivabilité de la fonction racine carrée en 0 se voit au fait que la courbe admet une tangente verticale en 0.



Fonction racine carrée

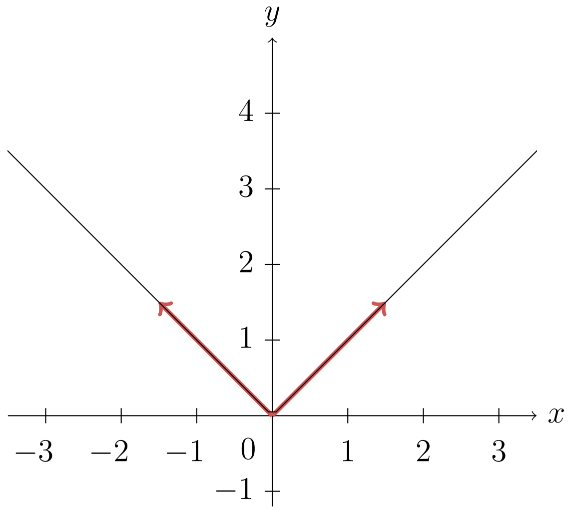
Fonction valeur absolue en $a = 0$

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$.
Montrons que f n'est pas dérivable en $a = 0$.
Soit $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{|h|}{h} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le taux d'accroissement $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ne converge pas vers une unique valeur lorsque h tend vers 0. La limite n'existe pas et la fonction n'est donc pas dérivable en 0.

Remarque.
Géométriquement, la non-dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0 se voit au fait que la courbe présente un « point angulеux » en 0.



Fonction valeur absolue

2 Formules de dérivation et fonction dérivée

2.1 Formules de dérivation pour les fonctions de référence

Proposition 2

Le tableau suivant donne les formules de dérivation pour les fonctions de référence.

Fonction	$\mathcal{D}_f$	$f(x) = \dots$	dérivable pour $a \in \dots$	$f'(a) = \dots$
constante	$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$	0
identité	$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
carrée	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2a$
puissance	$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	na^{n-1}
inverse	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{a^2}$
racine carrée	$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{R}$ et f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = k$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
  On calcule le taux d'accroissement de f en a :
  $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.
- Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
  On calcule le taux d'accroissement de f en a :
  $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)-a}{h} = \frac{h}{h} = 1 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1.$$
  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 1$.

- Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
  On calcule le taux d'accroissement de f en a :
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a+h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2a. \end{aligned}$$
  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
- On admet la formule pour la dérivée d'une fonction puissance.
- Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
  On calcule le taux d'accroissement de f en a :
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{-h}{(a+h)a}}{h} \\ &= \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{(a+h)a} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$
  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.
- Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
  On calcule le taux d'accroissement de f en a :
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{(a+h)-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Définition de la fonction dérivée

Définition 3

Si f est dérivable en tout nombre $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I.

Définition 4

Si f est dérivable sur I, la fonction qui a tout réel $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et elle est notée f'.

Les formules du tableau de la Proposition 2 (page 6) peuvent être reformulées de la façon suivante en l'exprimant avec les fonctions dérivées.

Proposition 3

Fonction	$\mathcal{D}_f$	$f(x) =$	Ensemble de dérivabilité	$f'(x) =$
constante	$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$	0
identité	$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
carrée	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
puissance	$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
inverse	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
racine carrée	$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.3 Dérivée et opérations sur les fonctions

Proposition 4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme de fonctions	$u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
Dérivée du produit d'une fonction u par une constante λ	$\lambda \times u$	$(\lambda \times u)' = \lambda \times u'$
Dérivée d'un produit de fontions	$u \times v$	$(uv)' = u'v+uv'$
Dérivée d'un quotient de fonctions	$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Dérivée de l'inverse d'une fonction	$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Remarque.
Par exemple, dans la première ligne, $(u+v)'=u'+v'$ est une égalité de fonctions. Cela signifie que pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$

Démonstration.

- Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I. Soit $a \in I$. On va montrer que $u+v$ est dérivable en a et que $(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a)$.
  En fait, pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{(u(a+h)+v(a+h))-(u(a)+v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} u'(a)+v'(a)
\end{aligned}$$

- Soit u une fonction définie et dérivable sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On va montrer que $\lambda \times u$ est dérivable en a et que $(\lambda \times u)'(a) = \lambda \times u'(a)$ En fait, pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} \\
&= \frac{\lambda\left(u(a+h)-u(a)\right)}{h} \\
&= \lambda\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \lambda u'(a)
\end{aligned}$$

- Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I. Soit $a \in I$. On va montrer que $u \times v$ est dérivable en a et que $(uv)'(a) = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$.
  En fait, pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{uv(a+h)-uv(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)\times v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h)-u(a))\times v(a+h)+u(a)\times(v(a+h)-v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)
\end{aligned}$$

- Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I avec, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Soit $a \in I$.
  On va montrer que $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en a et que $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a) \times v(a) - u(a) \times v'(a)}{v(a)^2}$.
  En fait, pour tout $h \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(a+h) - \frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h)}{v(a+h)v(a)}}{h} \\
&= \frac{\frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a) + u(a)v(a) - u(a)v(a+h)}{v(a+h)v(a)}}{h} \\
&= \frac{\frac{(u(a+h) - u(a))\,v(a) - u(a)\,(v(a+h) - v(a))}{v(a+h)v(a)}}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))\,v(a) - u(a)\,(v(a+h) - v(a))}{v(a+h)v(a) \times h} \\
&= \frac{\frac{(u(a+h) - u(a))\,v(a) - u(a)\,(v(a+h) - v(a))}{h}}{v(a+h)v(a)} \\
&= \frac{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a) - u(a)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}}{v(a+h)v(a)} \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{u'(a) \times v(a) - u(a) \times v'(a)}{v(a)^2}
\end{aligned}
$$

- Soit v une fonction définie et dérivable sur I avec, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. Soit $a \in I$.
  La fonction $\dfrac{1}{v}$ est un cas particulier d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 1$ et donc $u'(x) = 0$
  Ainsi, d'après la formule de la dérivée d'un quotient :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v}\right)'(a) &= \frac{u'(a) \times v(a) - u(a) \times v'(a)}{v(a)^2} \\
&= \frac{0 \times v'(a) - 1 \times v'(a)}{v(a)^2} \\
&= \frac{-v'(a)}{v(a)^2}
\end{aligned}
$$

□

Exemples.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 5x^2$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

Solution :

1. On a $f = u + v$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.
   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & u'(x) + v'(x) \\ & = & 2x - \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$
2. On a $f = \lambda u$ avec, $\lambda = 5$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$.
   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 5 \times u'(x) \\ & = & 5 \times 2x \\ & = & 10x \end{array}$$
3. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 + 3$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) \neq 0$).
   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi,
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ & = & \dfrac{1 \times (x^2+3) - (x+1) \times 2x}{(x^2+3)^2} \\ & = & \dfrac{x^2 + 3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+3)^2} \\ & = & \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2} \end{array}$$

2.4 Dérivée d'une fonction composée d'une fonction dérivable et d'une fonction affine

Proposition 5 – (admise)

Soit g une fonction dérivable sur I et soient a et b deux réels. Soit J un intervalle tel que pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$. La fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et
$$f'(x) = a \times g'(ax + b).$$

$$x \in J \longmapsto ax + b \in I \longmapsto g(ax + b)$$

Exemple.
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble de dérivabilité.

Solution :

1. Pour déterminer l'ensemble de définition, on résout l'inéquation suivante :
$$\begin{array}{rcl} & 3x+1 & \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow & 3x & \geqslant -1 \\ \Longleftrightarrow & x & \geqslant -\dfrac{1}{3} \end{array}$$
Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$.
2. On a $f(x) = g(3x+1)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$.
La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$. Ainsi, f est dérivable en x si $3x+1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{3}$.
Finalement, cela signifie que l'ensemble de dérivabilité de f est $\left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$.
3. En écrivant, $f(x) = g(3x+1)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$, on voit que $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$:
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & a \times g'(ax+b) \\ & = & 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}} \\ & = & \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} \end{array}$$

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer un nombre dérivé par méthode graphique.
- Déterminer un nombre dérivé par le calcul (comme limite du taux d'accroissement ou en calculant d'abord $f'(x)$).
- Déterminer graphiquement et par le calcul l'équation de la tangente à une courbe en un point.
- Calculer la dérivée d'une fonction en utilisant les formules (somme, produit, quotient, composée).

QCM d'entrainement