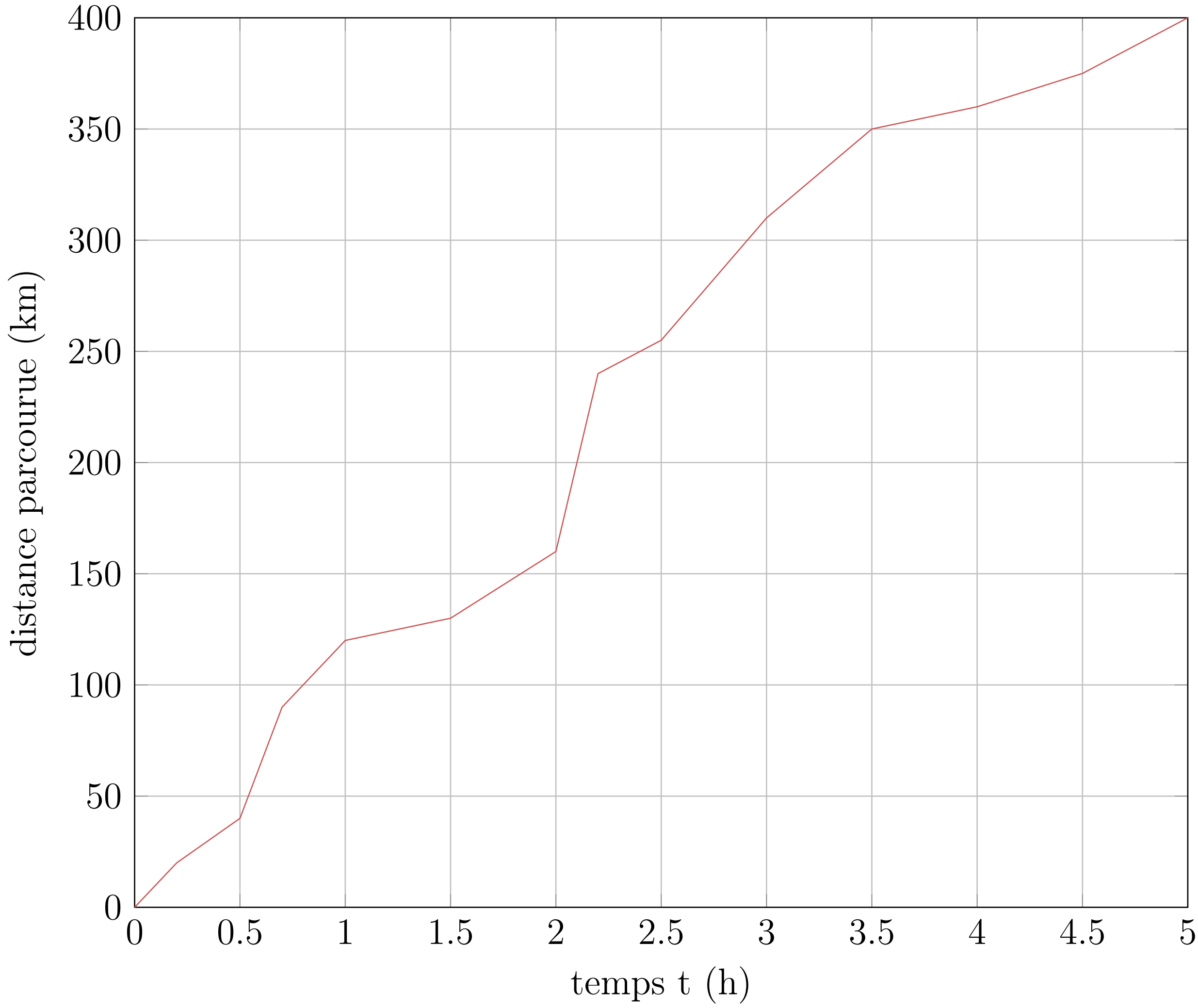
Nombre dérivé et fonction dérivée
Activités d'introduction

Activité 1 – Nombre dérivé et vitesse

Objectif : Comprendre comment on peut modéliser une vitesse.

Un automobiliste effectue un trajet de 400 km en 5 heures. En enregistrant les positions GPS de la voiture, on a reproduit ci-dessous la courbe donnant la distance parcourue en fonction du temps. A quel moment du trajet la voiture était-elle la plus rapide ? Justifier en donnant des éléments chiffrés.



Bilan

D'un point de vue graphique, à quoi correspond la vitesse calculée ?

Activité 2 – Nombre dérivé

Objectif : Comprendre comment déterminer graphiquement le coefficient directeur de la tangente à une courbe.

À l'aide du logiciel Geogebra, tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Placer ensuite les points A et B appartenant à la courbe et d'abscisses respectives 1 et 3 puis tracer la droite (AB). En utilisant l'outil **pente**, demander à Geogebra de déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

1. Quel est le coefficient directeur de la droite (AB) ?
2. Déplacer le point B sur la courbe afin qu'il se rapproche du point A. Vers quelle valeur le coefficient directeur se rapproche-t-il ?

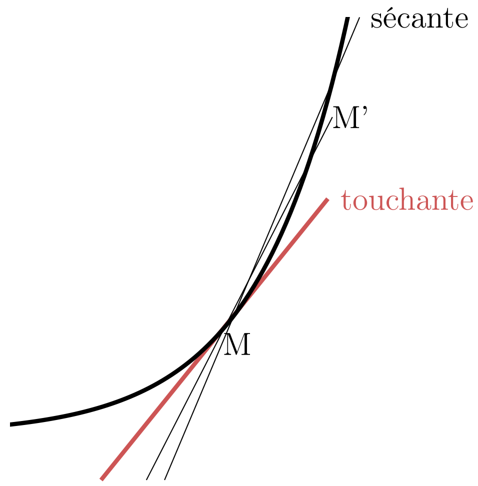
Bilan

Si on appelle **tangente** à la courbe au point A la droite épousant le mieux la courbe au voisinage de A, décrire le procédé permettant de déterminer le coefficient directeur de cette tangente.

Activité 3 – Histoire de la dérivation

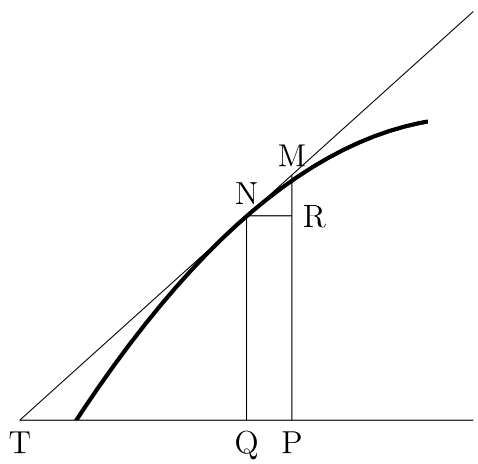
Objectif : Comprendre l'évolution historique de la théorie de la dérivation.

Document 1.
Il comprit ce que, plus de trois siècles plus tôt, Fermat avait compris : un arc infiniment petit d'une courbe peut être assimilé au segment correspondant de la touchante. [. . .] Une touchante ? C'est la limite d'une sécante lorsque les deux points M et M' où elle coupe la courbe « se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre ».
Toucher n'est pas couper ! Il dessina une touchante. Il se passait en mathématiques l'inverse de ce qui se passait dans la vie : on commença par le « rentre-dedans » de la sécante pour finir avec le « flirt » de la touchante. Mieux, le second était le résultat de l'abandon progressif du premier. Belle figure de l'érotisme.
Extrait du roman *Le théorème du Perroquet*, Denis Guedj, Editions du Seuil, 1998, p.450.



Document 2.
Le cheminement de la pensée mathématique dans cette création du calcul infinitésimal au XVIIème siècle a été lent, tortueux et confus. Dans l'expression $\frac{1}{h_n}((x+h_n)^m - x^m)$, le numérateur et le dénominateur deviennent tous deux 0 lorsque l'on prend $h_n = 0$ et l'expression $\frac{0}{0}$ n'a pas de sens. Les mathématiciens pensent s'en tirer en parlant comme Leibniz « d'infiniment petits », ou comme Newton, de « dernières raisons de quantités évanouissantes », ce qui ne fait que masquer par des mots l'imprécision des idées. [...]
Newton [parle de] fluxion de la fonction $y = f(x)$ (qu'il appelle « fluente ») [et] il note $\dot{y}$. Leibniz, de son côté, écrit $\frac{df}{dx}$.
Extrait de *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Jean Dieudonné, Hachette, 1987, p.75.

Document 3.
Isaac Barrow (1630-1677), le prédecessur d'Isaac Newton à la chaire de mathématiques de l'Université de Cambridge, souhaite dans ses cours revenir au point de vue géométrique et à la rigueur euclidienne. Il développe une méthode des tangentes « par le calcul » qui est plus générale que celle de Fermat et qui s'approche davantage encore des procédés modernes.
$\frac{\text{MR}}{\text{NR}} = \frac{\text{MP}}{\text{TP}}$ à cause de la similitude des triangles MRN et MPT. [...] La proportion $\frac{\text{MP}}{\text{TP}}$ permet [ensuite] de calculer la longueur de la sous tangente TP.
Extrait de *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, Editions du Seuil, 1986, p.187.



1. Quelle est l'idée de « touchante » mentionnée dans le document 1 ?
2. D'après les documents, quels sont les concepts ou les notations qui ont évolué au cours de l'histoire. Quel(s) problème(s) s'est notamment posé(s) ?
3. Dans le document 3, à quel théorème la phrase suivante fait-elle référence : « $\frac{\text{MR}}{\text{NR}} = \frac{\text{MP}}{\text{TP}}$ à cause de la similitude des triangles MRN et MPT » ?

Bilan

Est-il possible d'attribuer l'invention du calcul infinitésimal à un mathématicien et de dater cette invention de manière précise ?

Activité 4 – Formules pour calculer un nombre dérivé

Objectif : Déterminer des formules pour rendre le calcul des nombres dérivés plus pratique.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   (a) Calculer les nombres dérivés $f'(a)$ pour différentes valeurs de a.
   (b) Conjecturer une formule donnant $f'(a)$ en fonction de a.
   (c) Démontrer cette conjecture.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Déterminer et démontrer une formule donnant $g'(a)$ en fonction de a.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = 5x^2 - 4x + 2$.
   Déterminer et démontrer une formule donnant $h'(a)$ en fonction de a.

Bilan

Rappeler les trois formules démontrées dans cette activité.