

TP 7 – Le lièvre et la Tortue

Le Lièvre et la Tortue font une course. Ayant pris de l'avance, la Tortue se trouve à 100 mètres devant le Lièvre. Néanmoins la vitesse de la Tortue est 10 fois plus faible que celle du Lièvre et ce dernier est donc en train de la rattraper.

La Tortue fait le raisonnement suivant :

- « Puisque j'ai encore 100 mètres d'avance, si le Lièvre veut me dépasser, il faudra déjà qu'il parcourt ces 100 mètres. Dans le même temps, j'aurai eu le temps de faire 10 mètres. J'aurai donc encore 10 mètres d'avance.
- Dans cette nouvelle situation, le lièvre devra parcourir ces 10 mètres avant de pouvoir me dépasser. Pendant qu'il parcourra ces 10 mètres, j'aurai donc le temps de faire 1 mètre.
- À nouveau, dans cette situation, le lièvre devra encore parcourir 1 mètre avant de me dépasser. J'aurai le temps de faire 10 cm.

Comme on le voit, mon avance va devenir de plus en plus petite. Toutefois, il est possible de répéter ce raisonnement à l'infini donc même si mon avance devient extrêmement faible, le Lièvre ne me dépassera jamais et je suis assurée de gagner. »

1. Pourquoi le raisonnement de la Tortue est-il paradoxal ?
2. On considère l'étape n dans le raisonnement de la Tortue. Ainsi, à l'étape 0, la Tortue à 100 mètres d'avance, à l'étape 1, la Tortue à 10 mètres d'avance, etc. On note u_n la distance en mètres correspondant à l'avance de la Tortue. Par exemple, $u_0 = 100$, $u_1 = 10$, etc. On note par ailleurs, d_n la distance parcouru par le lièvre entre l'étape 0 et l'étape n . Ainsi, $d_0 = 0$, $d_1 = 100$, $d_2 = 110$, etc.

Écrire un algorithme Python demandant une valeur de n à l'utilisateur et calculant les valeurs de u_n et de d_n

3. Tester l'algorithme pour des grandes valeurs de n . Conjecturer la limite de d_n .
 - (a) Exprimer u_n en fonction de n .
 - (b) Exprimer d_n en fonction de n .
 - (c) Démontrer la conjecture faite à la question 2.
4. Comment peut-on expliquer le paradoxe apparent énoncé par la Tortue ?

Histoire

Le Lièvre et La Tortue (voir au dos) est une fable de Jean de La Fontaine publiée pour la première fois en 1668. Elle est inspirée des fables d'Ésope, écrivain grec du VII^e et VI^e siècle av.J.-C.

Bien plus récemment, *Le Lièvre et la Tortue* a été adapté au cinéma et fait partie des premiers courts métrages réalisés par Walt Disney (1935).



Le Lièvre et la Tortue

Par Jean de La Fontaine

Rien ne sert de courir ; il faut partir à point.
 Le Lièvre et la Tortue en sont un témoignage.
 « Gageons, dit celle-ci, que vous n'atteindrez point
 Si tôt que moi ce but. - Sitôt ? Êtes-vous sage ?
 Repartit l'animal léger :
 Ma commère, il vous faut purger
 Avec quatre grains ^a d'ellébore ^b.
 - Sage ou non, je parie encore. »
 Ainsi fut fait : et de tous deux
 On mit près du but les enjeux :
 Savoir quoi, ce n'est pas l'affaire,
 Ni de quel juge l'on convint.

Notre Lièvre n'avait que quatre pas à faire ;
 J'entends de ceux qu'il fait lorsque prêt d'être atteint
 Il s'éloigne des chiens, les renvoie aux calendes ^c,
 Et leur fait arpenter les landes.

Ayant, dis-je, du temps de reste pour brouter,
 Pour dormir, et pour écouter
 D'où vient le vent, il laisse la Tortue
 Aller son train de sénateur ^d.
 Elle part, elle s'évertue,
 Elle se hâte avec lenteur.

Lui cependant méprise une telle victoire,
 Tient la gageure à peu de gloire,
 Croit qu'il y va de son honneur
 De partir tard. Il broute, il se repose,
 Il s'amuse à toute autre chose
 Qu'à la gageure ^e. À la fin, quand il vit
 Que l'autre touchait presque au bout de la carrière ^f,
 Il partit comme un trait ; mais les élans qu'il fit
 Furent vains : la Tortue arriva la première.
 « Eh bien, lui cria-t-elle, avais-je pas raison ^g ?
 De quoi vous sert votre vitesse ?
 Moi l'emporter ! et que serait-ce
 Si vous portiez une maison ? »

^a. Le grain est une mesure de poids valant 1/24 de denier, soit 0,053g.

^b. On dit proverbialement qu'un homme a besoin de deux grains d'ellébore, pour dire qu'il est fou.

^c. On dit proverbialement : renvoyer un homme aux calendes grecques pour dire le remettre à un temps qui ne viendra point.

^d. On se sert de ce mot en raillant pour dire un conseiller vieux et grave (donc la tortue se déplace à la vitesse d'un vieux sénateur romain, très lentement).

^e. Le pari.

^f. Au bout de la course.

^g. N'avais-je pas raison ?