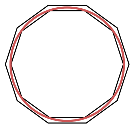
TP 4 – Méthode d'Archimède

L'objectif de ce TP est de déterminer une approximation du nombre π.

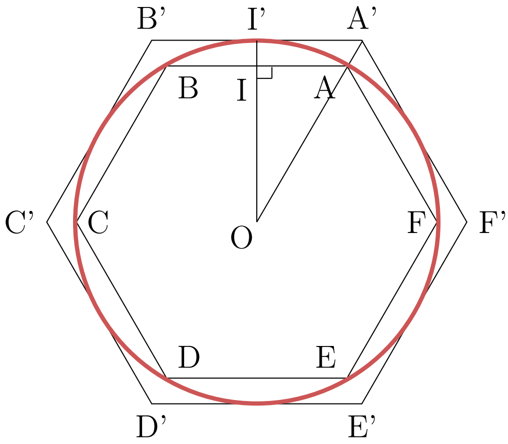
On sait que le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π. L'idée de la méthode d'Archimède consiste à encadrer ce cercle entre deux polygones réguliers inscrits et circonscrits. Plus le nombre de côtés des polygones est élevé, plus l'approximation sera précise.



Pour un entier $n \geqslant 3$, on note p_n le périmètre du polygone à n côtés intérieur au cercle de rayon $\dfrac{1}{2}$ et q_n le périmètre du polygone à n côtés extérieur à ce même cercle. On a :

$$p_n \leqslant \pi \leqslant q_n$$

Sur la figure ci-dessous, on considère que les deux polygones ont n côtés.



Partie A - Formules explicites en fonction de n

1. Justifier que $\widehat{\text{IOA}} = \dfrac{\pi}{n}$.
2. (a) Calculer la longueur IA en fonction de n.
   (b) Montrer que $p_n = n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
   (c) Montrer que $q_n = n \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
3. Calculer p_3 et q_3.

Partie B - Formules par récurrence

4. Pour cette question, on admettra les formules suivantes : pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$,
   $\cos(x) = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$ et $\sin(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $q_{2n} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$ et $p_{2n} = \sqrt{p_nq_{2n}}$.

5. En utilisant la calculatrice, en déduire des valeurs approchées de p_6 et de q_6.
6. On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel.

def approx(k)
$n \longleftarrow 3$
$\text{P} \longleftarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
$\text{Q} \longleftarrow 6\sqrt{3}$
Tant que $\text{Q-P} > k$:
$\text{Q} \longleftarrow \dfrac{2\text{PQ}}{\text{P+Q}}$
$\text{P} \longleftarrow \sqrt{\text{PQ}}$
$n \longleftarrow 2n$
Fin Tant que
Retourner (n, P, Q)

   Que calcule cet algorithme ? A quoi correspond la grandeur k entrée par l'utilisateur ? Pourquoi est-il important d'effectuer les lignes 6 et 7 dans cet ordre et de ne pas les intervertir ?
7. Programmer cet algorithme en langage Python.
8. Tester cet algorithme et obtenir une valeur approchée de π à 10^{-5} près. Combien de côté possède le polygone ayant permis d'obtenir cette approximation ? Combien de valeurs de P et de Q l'algorithme a-t-il calculé afin d'obtenir cette approximation ?
9. Quel sont les avantages et inconvénients des deux méthodes de calculs (formules explicites et formules par récurrence) ?

Histoire Méthode d'Archimède

La méthode d'approximation du périmètre d'un cercle par des polyèdre a été mise au point par **Archimède** (IIIe siècle av. J.-C.). Il a ainsi calculé une valeur approchée de π à 0,001 près en encadrant le cercle par des polygones à 96 côtés.

Bien plus tard, au XVIe siècle, le mathématicien allemand **Ludolph van Ceulen** passa la majeur partie de sa vie à calculer une valeur approchée de π en encadrant le cercle unité par des polygones à 2^{62} côtés ! Cela lui a permis de déterminer les 35 premières décimales de π.

van Ceulen

Archimède