TP 2 – Résolution d'une équation par dichotomie

On considère l'équation (E) : $x^5 - x^3 + 3x^2 - 5 = 0$.
L'objectif du TP est d'obtenir une valeur approchée d'une solution de (E).
Dans la suite, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 5$.
L'algorithme suivant écrit en langage Python permet de définir la fonction f.

```python
def f(x):
  return(x**5-x**3+3*x**2-5)
```

En remarquant que $f(0) = -5$ et que $f(2) = 31$, on en déduit qu'il existe au moins une solution de l'équation (E) comprise entre $a = 0$ et $b = 2$. L'idée de l'algorithme par dichotomie consiste à partager l'intervalle $\left[0\,;2\right]$ en deux. On détermine le milieu de l'intervalle :

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

On calcule alors $f(m)$ et il y a deux possibilités :

- Si $f(m) > 0$, la solution est comprise entre a et m.
- Si $f(m) < 0$, la solution est comprise entre m et b.

Ici, $f(m) = f(1) = -2$ donc la solution est comprise entre $m = 1$ et $b = 2$.

1. Effectuer les deux étapes suivantes de l'algorithme à la main afin d'obtenir un intervalle de longueur $\frac{1}{4}$ auquel la solution appartient.
2. Représenter graphiquement la courbe de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;2\right]$ avec Python (on pourra utiliser les packages numpy et matplotlib). Reproduire la courbe sur une feuille puis représenter graphiquement les différentes étapes de l'algorithme effectué.
3. On considère l'algorithme de dichotomie suivant écrit en langage Python et prenant en paramètre le nombre d'étapes à effectuer n :

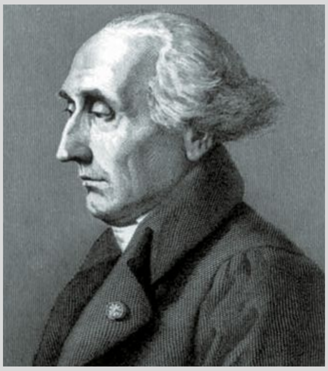
```python
def dichotomie(n)
  a=0
  b=2
  for k in range(n):
    m=(a+b)/2
    if f(m)<0:
      a=...
    else:
      b=...
  return a,b
```

   Compléter l'algorithme puis le tester pour différentes valeurs de n.

4. Pour $n = 10$, quelle valeur est renvoyée par l'algorithme ? Quelle est la précision de l'approximation effectuée ?
5. Modifier l'algorithme afin que le paramètre de la fonction ne soit pas le nombre d'étapes à effectuer mais la précision e de l'approximation faite. Tester ensuite l'algorithme et déterminer une approximation d'une solution de (E) à 10^{-6} près.

Histoire

À la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle et au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle, des mathématiciens comme **Joseph Louis Lagrange (1736-1813)**, **Niels Abel (1802-1829)** et **Évariste Galois (1811-1832)** se sont intéressés à la résolution des équations polynomiales. Pour les équations de degré deux, trois et quatre, des formules étaient connues depuis des siècles. Néanmoins, personne ne parvenait à déterminer une formule similaire pour le degré cinq. Ils ont en fait démontré qu'il était impossible qu'une telle formule existe. La détermination de valeurs approchées des solutions devenait alors la seule option envisageable, faute de formule donnant une valeur exacte.



Lagrange

Abel

Galois