Inégalités classiques et loi des grands nombres – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		2, 6, 7, 8			1, 2, 8	
Exercices ★★		3, 4, 5, 9	4, 10		3, 9	
Exercices ★ ★ ★		11	12		11, 12	

Exercice 1 ★ [Calculer]

La moyenne de la classe a une évaluation est de 10. Quelle proportion de la classe, au maximum, peut avoir une note supérieure ou égale à 15 ?

Exercice 2 ★ [Calculer, Modéliser]

À Recife, ville du Nordeste du Brésil, la température moyenne annelle est de 25,5 degrés Celsius sans que la température ne descende jamais en dessous de 0. Majorer la probabilité que la température soit supérieure à 35 degrés Celsius.

Exercice 3 ★★ [Calculer, Modéliser]

Sur une autoroute, la vitesse moyenne des véhicules est de 120 km/h.

1. Majorer la probabilité qu'un automobiliste roule à une vitesse supérieure à 150 km/h.
2. Minorer la probabilité qu'un automobiliste roule à une vitesse inférieure à 100 km/h.

Exercice 4 ★★ [Raisonner, Modéliser]

Montrer que quelle que soit l'entreprise considérée, moins de 10% des salariés gagnent plus de 10 fois le salaire moyen de cette entreprise.

Exercice 5 ★★ [Modéliser]

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, imaginer une situation dans laquelle la probabilité que la moyenne d'un échantillon soit comprise entre 7 et 13 est supérieure ou égale à 0,2.

Exercice 6 ★ [Modéliser]

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production d'un jour donné dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que la variance de la production quotidienne est 25 ?

Exercice 7 ⋆ [Modéliser]

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 8 ⋆ [Calculer, Modéliser]

On effectue n tirages avec remise dans un jeu de 52 cartes. Pour le i^e tirage, on note X_i la variable valant 1 si la carte tirée est un coeur et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. Soit $M = \frac{\sum_{i=1} 52X_i}{52}$. Calculer l'espérance et la variance de M.
3. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité que la moyenne s'écarte de l'espérance de plus de 0,1 soit inférieure à 0,05 ?

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

On répond au hasard à un QCM de 50 questions. Chaque réponse correcte rapporte 2 points et chaque réponse fausse fait perdre 0,5 points. On note X le nombre de bonnes réponses et S le nombre de score final.

1. Montrer que $S = 5X - 25$.
2. En déduire $\mathrm{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.
3. Majorer la probabilité de l'événement $\{S \geqslant 38\}$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
4. Calculer précisément cette probabilité. Que remarque-t-on ?

Exercice 10 ⋆⋆ [Raisonner]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(f(X))}{f(a)}.$$

Exercice 11 ⋆ ⋆ ⋆ [Modéliser, Calculer]

Une compagnie aérienne exploite un avion Paris-Montréal d'une capacité de 150 places. Pour ce vol, une analyse statistique a montré qu'un passager ayant réservé son billet se présentait à l'embarquement avec une probabilité de $p = 0{,}75$. La compagnie souhaite optimiser le remplissage de l'avion et souhaite vendre n billets, avec $n > 150$, mais en limitant le risque que plus de 150 personnes se rendent à l'embarquement à moins de 5%. On supposera de plus que $np < 150$.

Combien la compagnie peut-elle vendre de billets tout en s'assurant que la probabilité que plus de 150 clients se présentent à l'embarquement est inférieure ou égale à 5% ?

Exercice 12 ⋆ ⋆ ⋆ [Calculer, Représenter]

Soit X la variable aléatoire donnant le résultat d'un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Le dé est de plus supposé équilibré.

1. Donner $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. Déterminer combien de lancers il faut faire pour s'assurer que, avec une marge d'erreur de 5%, la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2{,}45 ; 2{,}55[$.
3. Modéliser cette situation par un algorithme en Python puis vérifier le résultat obtenu à la question 2.