Somme de variables aléatoires – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		6, 7, 11	1, 11		2, 3, 5, 6	
Exercices ★★		4, 8, 10			8, 9, 12	
Exercices ★ ★ ★		14	13, 14		13, 14	

Exercice 1 ★ [Raisonner]

Quelle condition sur X et Y doit-on supposer pour avoir $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$? Dans ce cas, a-t-on également $\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$?

Exercice 2 ★ [Calculer]

X et Y désignent deux variables aléatoires dont les lois de probabilités sont données ci-dessous.

x_i	1	-3	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,4	0,1	0,5

y_i	1	-3	2	4
$\mathrm{P}(Y = y_i)$	0,1	0,25	0,15	0,5

1. Le fait que Y prenne une valeur de plus que X empeche-t-il de calculer $\mathrm{E}(X+Y)$? De plus, si toutes les valeurs prises par X et par Y avaient été différentes, pourrait-on calculer $\mathrm{E}(X+Y)$? Calculer l'espérance de $X+Y$ si cela est possible.
2. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{V}(X+Y)$.

Exercice 3 ★ [Calculer]

X et Y désignent deux variables aléatoires dont les lois de probabilités sont données ci-dessous.

x_i	-1	0	2	4
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,1	0,1	0,7	0,1

y_i	3	4	8	10
$\mathrm{P}(Y = y_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

1. Calculer $\mathrm{E}(X - 3Y)$.
2. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Calculer $\sigma(X - 3Y)$.

Exercice 4 ★★ [Modéliser]

On tire au hasard et avec remise 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. On gagne 7 euros par as obtenu, 4 euros par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 euro dans tous les autres cas.
Par exemple, si on tire as de trèfle, 7 de coeur et 2 de pique, on gagne : $7 - 1 - 1 = 5$ euros.
On note Z la variable aléatoire donnant le gain total à ce jeu. Décomposer Z sous la forme d'une somme de 3 variables aléatoires que l'on définira puis calculer $\mathrm{E}(Z)$.

Exercice 5 ★ [Calculer]

X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale d'epérance 60. Elle se décompose en la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{3}{4}\right)$. Déterminer la valeur de n.

Exercice 6 ★ [Modéliser, Calculer]

Un joueur de bowling a une probabilité égale à 0,1 de faire un strike. Il lance 10 fois la boule de manière indépendante. Pour tout entier i entre 1 et 10, X_i est la variable correspondant au i^{e} lancer et valant 1 s'il fait un strike et 0 sinon.

1. À quoi correspond la variable X définie par $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 7 ★ [Modéliser]

On lance 15 dés équilibrés à 6 faces. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de 3 obtenus.

On souhaite modéliser la variable X comme la somme de 15 variables aléatoires :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{15}$$

. Quelles lois vérifient ces variables aléatoires ?Calculer $\mathrm{E}(X)$ et en donner une interprétation.

Exercice 8 ★★ [Modéliser, Calculer]

La variable aléatoire donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson dans un échantillon de $50 baguettes$ d'une même boulangerie suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$.
On recueille les résultats (indépendants) du prélèvement de 50 baguettes dans 10 boulangeries (ce qui donne 500 baguettes en tout) et on note Z la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson sur l'ensemble des 10 boulangeries.
Déterminer $\mathrm{E}(Z)$ et $\sigma(Z)$.

Exercice 9 ★★ [Calculer]

X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}475$. On considère un échantillon $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_{50})$ de la loi suivie par X ainsi que les variables aléatoires suivantes :

$$S_{50} = \sum_{k=0}^{50} X_k$$

et

$$M_{50} = \frac{S_{50}}{50}$$

Déterminer les espérances et les variances de S_{50} et M_{50} au centième près.

Exercice 10 ★★ [Modéliser]

Écrire une situation de la vie courante pouvant être modélisée par une somme de variables aléatoires.

Exercice 11 ★ [Modéliser, Représenter]

On lance 5 dés cubiques équilibrés. On note X_1 la variable correspondant au résultat du premier dé. On note de plus X la somme des cinq résultats obtenus.
A-t-on $X = 5 \times X_1$?

Exercice 12 ★★ [Calculer]

On considère une urne contenant des boules noires, blacnhes et rouges. On tire avec remise trois boules de l'urne. À chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule blanche rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points. On note respectivement N, B et R les événements « Obtenir une boule noire », « Obtenir une boule blanche » et « Obtenir une boule rouge ». On note enfin X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant respectivement au nombre de points obtenus aux premier, deuxième et troisième tirages.

1. Calculer les valeurs suivantes :
   (a) $X_2((\mathrm{B}\,;\mathrm{R}\,;\mathrm{N}))$
   (b) $X_1((\mathrm{N}\,;\mathrm{B}\,;\mathrm{N}))$
   (c) $X_3((\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,;\mathrm{R}))$
2. Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.
3. Dans l'urne, il y a en fait 10 boules noires, 7 boules blanches et n boules rouges. Quelle doit être la valeur de n pour que l'espérance soit positive mais minimale ?
4. Calculer alors, pour cette valeur de n, l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 13 ★★★ [Calculer, Raisonner]

Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois une pièce équilibrée.

- Si la pièce tombe sur pile au k^{e} lancer, on gagne k euros (les gains de chaque lancer s'ajoutent).
- Sinon, on ne gagne rien.

Pour tout $0 \leqslant l \leqslant n$, on note Z_l le total des gains obtenus à l'issue du l^{e} lancer.
Calculer $\mathrm{V}(Z_l)$.

Exercice 14 ★★★ [Représenter, Calculer, Modéliser]

On dispose d'une commode contenant n tiroirs et de n chaussettes qu'on dispose aléatoirement et d'une manière indépendante dans les tiroirs (le nombre de chaussettes par tiroir n'est pas limité).

1. Déterminer, en moyenne, le nombre de tiroirs restés vides.
2. Vérifier ce résultat expérimentalement en écrivant un algorithme en Python.