Loi de Bernoulli et loi binomiale – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		9, 18, 19, 20, 21, 23			1, 2, 3, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23	10
Exercices ★★		4, 11, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 36	22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 36		4, 5, 11, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 36	
Exercices ★ ★ ★	6, 7, 8, 32, 34, 37	6, 7, 31, 34, 35	34	8	31, 32, 35, 37	8

Exercice 1 ★ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{3}{2};\ \binom{5}{3};\ \binom{7}{3};\ \binom{21}{2}$$

Exercice 2 ★ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer tous les coefficients binomiaux de la forme $\binom{10}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 10.

Exercice 3 ★ [Calculer]

À l'aide de la calculatrice, déterminer un ordre de grandeur de $\binom{74}{35}$.

Exercice 4 ★★ [Modéliser, Calculer]

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :

(a) 5 Carreaux ou 5 Piques.

(b) 2 Carreaux et 3 Piques.

(c) au moins un Roi.

(d) au plus un Roi.

(e) exactement 2 Rois et exactement 3 Piques.

Exercice 5 ★★ [Calculer]

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

Exercice 6 ★★★ [Chercher, Modéliser]

Démontrer, en dénombrant un ensemble bien choisi, que pour $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

Exercice 7 ★★★ [Chercher, Modéliser]

Démontrer, en dénombrant un ensemble bien choisi, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 8 ★★★ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant p$,

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Exercice 9 ★ [Modéliser]

On considère une urne dans laquelle sont disposées 4 boules rouges et 6 boules noires. Imaginez une expérience aléatoire qui soit une épreuve de Bernoulli et une qui n'en soit pas.

Exercice 10 ★ [Communiquer, Calculer]

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard et on considère le succès : « obtenir un as ». Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre.

Exercice 11 ★★ [Modéliser, Calculer]

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est l'espérance et la variance de X ?
3. Imaginer une situation concrète qui peut être modélisée par cette variable aléatoire.

Exercice 12 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 13 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 14 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. Déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$.

Exercice 15 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}1$. Déterminer $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$.

Exercice 16 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}17$. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 17 ★ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = \frac{1}{2}$. Déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$.

Exercice 18 ★ [Calculer, Modéliser]

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine. Le nombre de « menu terroir » qui seront alors commandé est une variable aléatoire X. On considère que la probabilité qu'un des clients commande un « menu terroir » est $p = 0{,}3$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de « menus terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315.

Exercice 19 ★ [Calculer, Modéliser]

Un fabricant de processeurs pour téléphone portable certifie que, dans son stock, la probabilité qu'un processeur neuf soit défectueux est $p = 0{,}0001$. On désigne par Y la variable aléatoire correspondant au nombre de processeurs défectueux dans un lot de 200 prélevés au hasard. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Ainsi, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}0001$. Déterminer la probabilité, arrondie au millième, qu'il n'y ait aucun processeur défectueux dans un lot de 200 processeurs.

Exercice 20 ★ [Modéliser, Calculer]

Une compagnie ferroviaire réalise un sondage de satisfaction auprès des usagers. On estime que la proportions d'usagers qui s'estiment satisfaits est de 0,72. On choisit au hasard un échantillon de 334 usagers. Le nombre d'usagers peut être modélisé par une variable aléatoire X.

1. Jusitfier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer le nombre moyen d'usagers auquel on peut s'attendre sur les 334 usagers.
3. Calculer $\mathrm{P}(X > 250)$. Interpréter le résultat.

Exercice 21 ★ [Modéliser, Calculer]

Une entreprise produit des pièces de moteurs. On note D l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ». On suppose que $\mathrm{P}(D) = 0{,}02$. On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématiques, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

Exercice 22 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

- A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;
- R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
- R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
- R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation. *Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.*
2. (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
   Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   (a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p):
    n=1
    while 1-(5/6)**n<=p:
        n=n+1
    return(n)
```

(b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 23 ★ [Calculer, Modéliser]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :
   a. 0
   b. 1
   c. $0,24$
   d. $0,76$
2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :
   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$
   d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$
3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :
   a. $P(X < 1)$
   b. $P(X \leqslant 1)$
   c. $P(X \geqslant 2)$
   d. $1 - P(X = 0)$

Exercice 24 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 25 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.**, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Exercice 26 ★★ [Calculer, Modéliser]

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.
Indication : on pourra distinguer les cas où n est pair et n est impair.

Exercice 27 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Construire un arbre pondéré qui modélise la situation.
2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. (a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   (b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Exercice 28 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2
On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   (c) Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à $0,99$?

Exercice 29 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.
   On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :
   - F : « le salarié interrogé est une femme »,
   - S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

   $\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.
   (a) Donner la probabilité de l'évènement S.
   (b) Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.
   (c) On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
   (d) Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage. Justifier l'affirmation du directeur.
2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
3. (a) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
   (c) Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```python
def proba(k):
    P=0
    for i in range(0,k+1):
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return(P)
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   (a) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
4. Cette question est indépendante des questions 1 et 2.
   Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
   Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 30 ★★ [Calculer, Modéliser]

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consist à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   (a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p\left(Y_k = 5\right) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   (b) Ecrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k
2. On note $\mathrm{E}\left(Y_k\right)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}\left(Y_k\right)$ est strictement positive.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 31 ★★★ [Calculer, Modéliser]

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70% et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

Exercice 32 ★ ★ ★ [Calculer, Chercher]

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. Pour quelle(s) valeur(s) de k la probabilité $p_k = \mathrm{P}(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 33 ★★ [Calculer, Modéliser]

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.
On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P\left(X_n = 1\right) = 0,95^n$.

   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P\left(X_n = x_i\right)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

   Montrer que :
   $$E\left(X_n\right) = n + 1 - n \times 0,95^n.$$

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   Montrer que f est décroissante sur $[20\,;\,+\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20\,;\,+\infty[$.

   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E\left(X_n\right) < n$.
En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

Exercice 34 ★★★ [Chercher, Représenter, Modéliser]

On lance 1000 fois un dé équilibré à six faces. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'estimer la probabilité d'obtenir entre 140 et 190 fois le résultat 6.

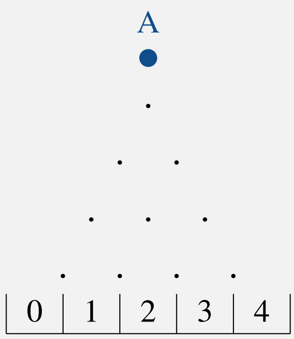
Exercice 35 ★★★ [Calculer, Modéliser]

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\mathrm{E}(S_n)$ est égale à 10. Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité
$$\mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$$
où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. (a) Établir l'égalité
$$\ln\left(\mathrm{P}(S_n=0)\right) = -10 \times \frac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$$
où ln désigne la fonction logarithme népérien; En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(S_n=0\right) = \mathrm{e}^{-10}$.
   (b) Démontrer que :
   $\mathrm{P}\left(S_n = k+1\right)$
   $= \mathrm{P}\left(S_n = k\right) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$,
   où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
   (c) Démontrer que si pour tout entier k, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$, alors on a également, pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k+1\right) = \mathrm{e}^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$$
   (d) Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathrm{P}\left(S_n = k\right)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

Exercice 36 ★★ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Un joueur lache une bille sur un plan incliné sur laquelle on a planté des clous (voir la figure ci-dessous). La bille est lachée depuis la point A. À chaque clou rencontré, la bille tombe de manière équiprobable à gauche ou à droite du clou. En fin de parcours, elle se retrouve donc dans l'une des cases numérotées de 0 à 4.



1. Pour chacune des cases, calculer la probabilité que la bille tombe dedans.
2. On souhaite vérifier le résultat par une modélisation informatique. Écrire un algorithme en langage Python permettant de modéliser le lacher de 1000 billes et calculant le nombre de billes tombées dans chacune des cases.
3. Tester l'algorithme à plusieurs reprises. Les résultats semblent-ils conformes aux probabilités calculées à la question 1 ?

Exercice 37 ★★★ [Chercher, Calculer]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0\,;1\,;\dots,n\}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = \mathrm{P}(X = k)$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0\,;1\,;\dots,n\}$. Montrer qu'elles ont même loi si, et seulement si, $G_X = G_Y$.
2. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
3. Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{0\,;1\,;\dots,n\}$,
$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$
et $V(X) = G''_X(1)+G'_X(1)-\left(G'_X(1)\right)^2$.
Retrouver alors l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.