Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Loi de Bernoulli
et
loi binomiale

Table des matières

1 Coefficients binomiaux

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments.

Le **coefficient binomial** « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensemble de A ayant k éléments.

Exemples.

$\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{0} = 1$.

Proposition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque.

La Proposition 1 permet de calculer directement un coefficient binomial. Les calculs de factorielles sont toutefois fastidieux et l'intérêt de cette formule est donc surtout théorique.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Pour choisir une liste de k éléments parmi un ensemble de n éléments, on commence par choisir un premier élément. Il y a n possibilités. Ensuite, on choisit un second élément. Il y a $n-1$ possibilités. On choisit comme cela chaque élément jusqu'au k^{e} élément pour lequel il y a $n-k+1$ possibilités.

Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.

On a ici choisi une liste de k éléments parmi n éléments pour laquelle l'ordre du choix importe. En revanche, dans un ensemble, l'ordre des éléments n'importe pas. Le nombre de possibilités que nous avons déterminé compte donc plusieurs fois le même ensemble. Or, pour ordonner k éléments donnés, il y a $k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = k!$ possibilités. Il faut donc diviser le nombre de possibilités trouvé par $k!$.

Ainsi, on obtient : $\binom{n}{k} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. □

Exemples.

$\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2! \times (7-2)!} = \dfrac{7!}{2! \times 5!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21.$

Proposition 2 – Relation de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Remarque.
La relation de Pascal (Proposition 2) est une relation de récurrence. Elle nécessite de calculer tous les coefficients binomiaux précédents mais permet d'éviter le calcul des factorielles.

Démonstration.
Soit A un ensemble à $n+1$ éléments. On considère un élément fixé que l'on note x_1.
Il y a $\binom{n+1}{k+1}$ sous-ensembles de A ayant $k+1$ éléments.
On va calculer ce nombre de sous-ensembles d'une autre façon afin d'établir la formule annoncée.
Pour choisir un sous ensemble de A ayant $k+1$ éléments, on peut commencer par choisir si x_1 appartient à ce sous ensemble.
Si x_1 appartient au sous-ensemble, il reste alors à choisir k éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
Si x_1 n'appartient pas au sous-ensemble, il reste à choisir $k+1$ éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités.
Au total, le nombre de sous-ensembles possibles est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, d'où le résultat. □

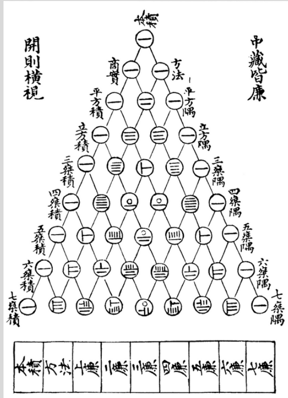
Remarque.
La relation de Pascal permet de construire le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**. Chaque coefficient s'obtient en ajoutant le coefficient au dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.

n \ k	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

D'après le tableau, on sait par exemple que $\binom{4}{2} = 6$.

Histoire – Coefficients binomiaux

On désigne généralement par « triangle de Pascal » le tableau décrit ci-dessus. Ce triangle était en réalité déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise Pascal. Il était connu des mathématiciens persans au Xᵉ siècle mais aussi en Chine à partir du XIII ᵉ siècle. Plus tard, au XVIIᵉ siècle, l'apport de **Blaise Pascal** (1623-1662) sera de proposer une démonstration rigoureuse de la relation qui portera son nom. Pour la démontrer, il met en place une version aboutie du raisonnement par récurrence.



Triangle arithmétique (Chine, XIIIᵉ - XIVᵉ siècles)

2 Loi de Bernoulli

Définition 3 – Loi de Bernoulli

On dit qu'un variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Remarque.
En général, l'issue 1 est associée à un succès et l'issue 0 est associée à un échec.

Exemple.
On lance un dé équilibré à six faces.
On définit la variable aléatoire X de la manière suivante : $X = 1$ si le résultat est pair et $X = 0$ sinon.
Dans ce cas, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors,
- $\mathrm{E}(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

Démonstration.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoullide paramètre p. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau de la définition 3. On en déduit la valeur de l'epérance et de la variance :

$$\mathrm{E}(X) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$$

et
$$V(X) = p \times (1-p)^2 + (1-p) \times (0-p)^2 = p(1-p).$$

□

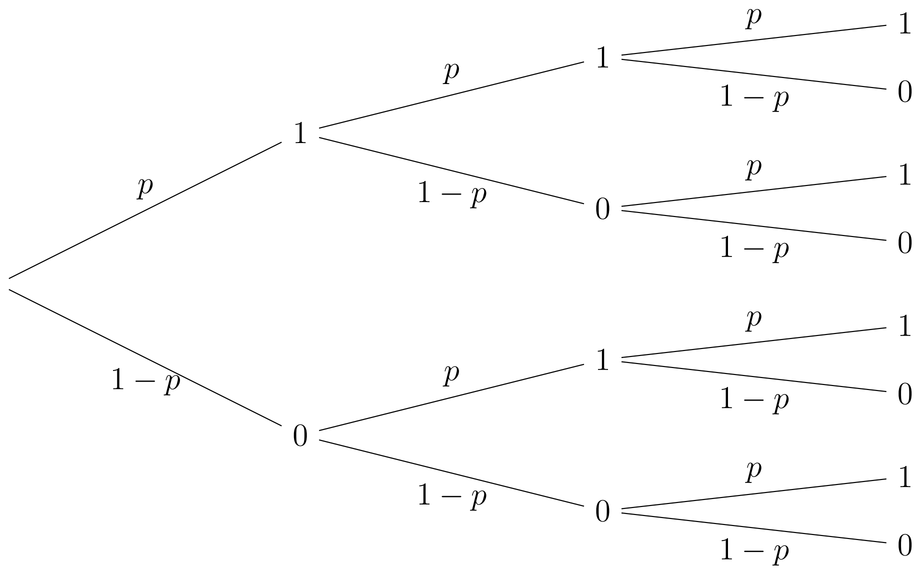
3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 4 – Schéma de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire associée à une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette expérience est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Exemple.
Cas d'un schéma de Bernoulli pour $n = 3$.



3.2 Loi binomiale

Définition 5 – Loi Binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenu parmi les n épreuves suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Proposition 4

Soit X une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration.
Pour calculer $P(X = k)$ à partir de l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves, il faut :

- Déterminer le nombre de chemins à k succès. Il y en a $\dbinom{n}{k}$.
- Déterminer la probabilité correspondant à un chemin de k succès. Sur un tel chemin, il y a k succès (de probabilité p et $n - k$ échecs (de probabilité $n - p$). La probabilité correspondant à un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.

Finalement, on en déduit que $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Proposition 5

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$\mathrm{E}(X) = np.$$

Démonstration.
Pour cette démonstration, on admettra la formule suivante (appelée formule du binôme de Newton) :

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \times \mathrm{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{(d'après la proposition 3)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \times \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \right)
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, on pose $i = k - 1$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= n \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{i+1} (1-p)^{n-(i+1)} \right) \\
&= np \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{i} (1-p)^{n-1-i} \right) \\
&= np \times (p + (1-p))^{n-1} \quad \text{(en utilisant la formule du binôme de Newton avec } a = p \text{ et } b = 1-p) \\
&= np \times 1^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

□

Exemple.
On lance 60 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le nombre de fois où l'on obtient 6. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.

Solution :
L'expérience consistant à lancer un dé est un schéma de Bernoulli donc la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès à chaque étape).
Ainsi, $E(X) = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$.
Cela signifie qu'en lançant 60 fois un dé, on obtiendra en moyenne 10 fois un 6.

Proposition 6

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$V(X) = np(1-p).$$

Démonstration.
Voir chapitre suivant. □

4 Échantillonnage

On suppose qu'une partie de la population possède un certain caractère (ex de caractère : avoir les yeux bleu, avoir voté Oui au dernier referendum, avoir des enfants, *etc.*). Ce caractère est présent dans la population en proportion $p \in]0\,;1[$. On tire au hasard n personnes de cette population (on dit qu'on prélève un **échantillon**) et on note X le nombre d'individus possédant le caractère considéré. Il est clair que la variable X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

On définit alors la notion d'intervalle de fluctuation de la manière suivante :

Définition 6

Soit $\alpha \in]0\,;1[$. On dit qu'un intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil 1α (on dit aussi avec une marge d'erreur de α) si, et seulement si, $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$.

Remarque.
Un intervalle de fluctuation n'est pas défini de manière unique.

Exemple.
Dans le cadre d'un sondage électoral, on considère que la proportion de la population qui souhaite voter Oui au prochain referendum est de 40% et que l'on demande à 1000 personnes leur intention de vote. On note X le nombre de personnes, parmi les 1000, ayant répondu qu'elle allaient voter Oui. Déterminer un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%. Interpréter le résultat.

Solution :
X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0{,}4$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathrm{P}(X \geqslant 431) \leqslant 0{,}025$ et $\mathrm{P}(X \leqslant 370) \leqslant 0{,}025$.
Par conséquent,

$$\mathrm{P}(371 \leqslant X \leqslant 430) = 1 - \mathrm{P}(X \geqslant 431) - \mathrm{P}(X \leqslant 370) \geqslant 1 - 0{,}025 - 0{,}025 \geqslant 0{,}95.$$

Ainsi, cela signifie qu'avec une marge d'erreur de 5% (au seuil de 95%), le nombre de réponses positives au sondage sera compris entre 371 et 430.

Savoir-faire du chapitre

- Modéliser une situation par une loi de Bernoulli ou par un schéma de Bernoulli.
- Calculer des probabilités associées à une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- Déterminer un intervalle de fluctuation.

QCM d'entrainement