Combinatoire et dénombrement – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ★		6, 7, 8, 9, 10, 12, 13		6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 19	1, 2, 3, 4, 22	19
Exercices ★★		11, 14, 15, 16, 17		14, 15, 16, 17, 20	11, 23, 24	20
Exercices ★★★	5, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33	18, 21, 30, 31	5, 21, 25, 26, 32	18, 21, 27, 29, 30, 31, 32, 33	28, 33	27

Exercice 1 ★ [Calculer]

Vrai ou Faux ?

- $(1\,;\pi) \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R}$
- $(1\,;\pi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$
- $(1\,;\pi) \in \mathbb{R}^2$
- $\{1\,;\pi\} \in \mathbb{R}^2$

Exercice 2 ★ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{3}{2};\ \binom{5}{3};\ \binom{7}{3};\ \binom{21}{2}$$

Exercice 3 ★ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer tous les coefficients binomiaux de la forme $\binom{10}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 10.

Exercice 4 ★ [Calculer]

À l'aide de la calculatrice, déterminer un ordre de grandeur de $\binom{74}{35}$.

Exercice 5 ★★★ [Chercher, Représenter]

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Exercice 6 ★ [Raisonner, Modéliser]

On considère les lettres A, B, C et D. Combien de mots (qui n'ont pas nécessairement un sens) de cinq ou six lettres peut-on écrire ?

Exercice 7 ★ [Raisonner, Modéliser]

Un numéro de téléphone portable possède dix chiffres et commence nécessairement par 06 ou 07. Combien de numéro de téléphone portable peut-on former ?

Exercice 8 ⋆ [Raisonner, Modéliser]

Cinq élèves se mettent en rang. Combien y'a-t-il de manières de les disposer les uns derrière les autres ?

Exercice 9 ⋆ [Raisonner, Modéliser]

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 10 ⋆ [Raisonner, Modéliser]

Soit $n \geqslant 3$. Dans un plan, on trace n droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

Exercice 11 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir :

(a) 5 Carreaux ou 5 Piques.

(b) 2 Carreaux et 3 Piques.

(c) au moins un Roi.

(d) au plus un Roi.

(e) exactement 2 Rois et exactement 3 Piques.

Exercice 12 ⋆ [Raisonner, Modéliser]

Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes ?

Exercice 13 ⋆ [Raisonner, Modéliser]

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ? (il n'y a ici aucune condition sur les jours de fermeture)
2. Reprendre la même question si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Reprendre la même question si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 14 ⋆⋆ [Raisonner, Modéliser]

Soit A l'ensemble des nombres à 5 chiffres pour lesquels il y a au moins un des chiffres qui est répété plusieurs fois. Déterminer Card(A).

Exercice 15 ⋆⋆ [Raisonner, Modéliser]

Huit coureurs sont au départ d'un 100m.

1. Combien de classements possibles peut-on construire ?
2. Combien de podiums différents existe-t-il ?

Exercice 16 ★★ [Raisonner, Modéliser]

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE et ANANAS.

Exercice 17 ★★ [Raisonner, Modéliser]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

Exercice 18 ★ ★ ★ [Raisonner, Modéliser]

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

Exercice 19 ★ [Raisonner, Communiquer]

On considère 51 entiers (distincts !) compris entre 1 et 100. Démontrer que parmi ces entiers, il y en a deux qui sont consécutifs.

Exercice 20 ★★ [Raisonner, Communiquer]

On considère un ensemble A de $n+1$ entiers distincts choisis dans $\{1\,;2\,;\ldots\,;2n\}$. Démontrer que parmi les éléments de A, on peut toujours trouver deux entiers dont la somme est égale à $2n+1$.

Exercice 21 ★ ★ ★ [Raisonner, Modéliser, Représenter]

Un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ? Répondre à la question à l'aide d'un algorithme Python.

Exercice 22 ★ [Calculer]

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$
2. $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
3. $(n+1)!-n!$
4. $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 23 ★★ [Calculer]

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

Exercice 24 ★★ [Calculer]

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k k!$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 25 ★★★ [Chercher, Représenter]

Démontrer, en dénombrant un ensemble bien choisi, que pour $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

Exercice 26 ★★★ [Chercher, Représenter]

Démontrer, en dénombrant un ensemble bien choisi, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 27 ★★★ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant p$,

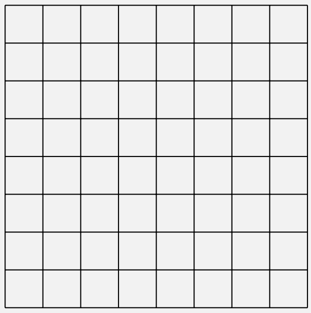
$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Exercice 28 ★★★ [Chercher, Calculer]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 29 ★★★ [Chercher, Raisonner]

Combien de rectangles apparaissent sur la figure ci-dessous.



Exercice 30 ★★★ [Raisonner, Modéliser, Chercher]

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?

Exercice 31 ★ ★ ★ [Raisonner, Modéliser, Chercher]

Lors de la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés. Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier, on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé. Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configuration différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ? La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.
   (a) Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?
   (b) Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux à deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?
   (c) En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

Exercice 32 ★ ★ ★ [Raisonner, Représenter]

On appelle partition d'un entier naturel n toute suite finie d'entiers naturels non nuls $(x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_k)$ telle que $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k$ et $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. On note Γ_n le nombre de partitions de l'entier n.

1. Déterminer Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4.
2. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions de n dont le premier terme est inférieur ou égale à j et on note $y_{n,j} = \mathrm{Card}(Y_{n,j})$. Par convention, on pose $y_{0,0} = 1$.
3. Montrer que si $2 \leqslant j \leqslant n$, alors
$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}.$$
4. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le cardinal de Γ_n.

Exercice 33 ★ ★ ★ [Raisonner, Calculer, Chercher]

Soient A_1, A_2,..., A_n des ensembles finis. Montrer la formule suivante connue sous le nom de « formule du crible » ou encore « formule de Poincaré » :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right).$$