Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Combinatoire et dénombrement

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble

Définition 1

Soit A un ensemble fini. Le cardinal de A, noté Card(A), est le nombre d'éléments de A.

1.1 Réunion d'ensembles

Proposition 1

Soient A et B deux ensembles :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}(\mathrm{B}) - \mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Définition 2

Deux ensembles A et B sont disjoints si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

Proposition 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints (c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$), alors :

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(\mathrm{A}_k).$$

1.2 Produit cartésien d'ensembles

Définition 3

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble, noté $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ constitué des couples $(x\,;y)$ où $x \in \mathrm{A}$ et $y \in \mathrm{B}$. On a ainsi :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x\,;y) \;/\; x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}\}\,.$$

Exemple.
Si $\mathrm{A} = \{a\,;b\}$ et $\mathrm{B} = \{5\,;6\,;7\}$, alors $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \Big\{(a\,;5);\ (a\,;6);\ (a\,;7);\ (b\,;5);\ (b\,;6);\ (b\,;7)\Big\}$.

Proposition 3

Soient A et B deux ensembles finis.

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{A} \times \mathrm{B}\right) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Card}(\mathrm{B})$$

On généralise la définition du produit cartésien à un produit de plus de deux ensembles avec la définition suivante.

Définition 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient A_1, A_2, $\dots A_n$ des ensembles non vides. On définit le produit cartésien des ensembles A_1, A_2, $\dots A_n$ par :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \Big\{(x_1\,;x_2\,;\dots\,;x_n)\,/\text{ pour tout } i, x_i \in A_i\Big\}$$

Remarque.
Si A est un ensemble, on note A^n le produit de A avec lui-même n fois.

Définition 5

On appelle n-uplet un élément de A^n.

Remarque.
On peut voir un n-uplet de A une liste d'éléments de A dans laquelle l'ordre des éléments compte.

Proposition 4

Soit A un ensemble fini.

$$\text{Card}\,(A^n) = \text{Card}(A)^n$$

Exemple.
Un immeuble est protégé par un digicode. Le code est constitué de 4 chiffres allant de 0 à 9. Combien y'a-t-il de codes possibles ?

Solution :

$$\text{Card}\left(\{0\,;1\,;\dots\,;9\}^4\right) = 10^4 = 10\,000.$$

2 Permutations et arrangements

2.1 Permutations

Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Définition 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un ensemble à n éléments. Une **permutation** de A est un n-uplet d'éléments de A tous distincts.

Exemple.
Si $A = \{1\,;2\,;3\}$, les permutations de A sont : $(1\,;2\,;3)$; $(1\,;3\,;2)$; $(2\,;1\,;3)$; $(2\,;3\,;1)$; $(3\,;1\,;2)$; $(3\,;2\,;1)$;

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de A est $n!$

Démonstration.
Pour choisir un n-uplet d'éléments de A distincts :

- On commence par choisir un élément de A : il y a n possibilités
- On choisit ensuite un second élément (distinct du premier) : il y a $n-1$ possibilités.
- On poursuit afin de choisir tous les éléments de A, un par un.

Au total, le nombre de choix possibles est donc :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$$

□

2.2 Arrangements

Définition 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments. Un **arrangement** de k éléments de A est un k-uplet d'éléments de A tous distincts.

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments. Le nombre d'arrangements à k éléments est :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration.
La démonstration est similaire à celle de la proposition 5. Il faut cependant choisir seulement k éléments et le produit n'est donc composé que de k termes : de n à $n-k+1$. □

Exemple.
Un immeuble est protégé par un digicode. Le code est constitué de 4 chiffres allant de 0 à 9 et qui doivent être tous différents. Combien y'a-t-il de codes possibles ?

Solution :
Cela correspond au nombre d'arrangements à 4 éléments dans $\{0\,;1\,;\ldots\,;9\}$. Le nombre de possibilités est donc :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$

3 Combinaisons

Définition 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments.
Une combinaison à k éléments de A est un sous ensemble de A de cardinal k.

Définition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments.
Le **coefficient binomial**, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de combinaisons à k élements de A, c'est-à-dire le nombre de sous-ensemble de A ayant k éléments.

Exemples.
$\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{0} = 1$.

Proposition 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque.
La Proposition 1 permet de calculer directement un coefficient binomial. Les calculs de factorielles sont toutefois fastidieux et l'intérêt de cette formule est donc surtout théorique.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.
Pour choisir une liste de k éléments parmi un ensemble de n éléments, on commence par choisir un premier élément. Il y a n possibilités. Ensuite, on choisit un second élément. Il y a $n-1$ possibilités. On choisit comme cela chaque élément jusqu'au k^{e} élément pour lequel il y a $n-k+1$ possibilités.
Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.
On a ici choisi une liste de k éléments parmi n éléments pour laquelle l'ordre du choix importe. En revanche, dans un ensemble, l'ordre des éléments n'importe pas. Le nombre de possibilités que nous avons déterminé compte donc plusieurs fois le même ensemble. Or, pour ordonner k éléments donnés, il y a $k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = k!$ possibilités. Il faut donc diviser le nombre de possibilités trouvé par $k!$.
Ainsi, on obtient : $\binom{n}{k} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. □

Exemples.
$\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2! \times (7-2)!} = \dfrac{7!}{2! \times 5!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21.$

Proposition 8 – Relation de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Remarque.
La relation de Pascal (Proposition 2) est une relation de récurrence. Elle nécessite de calculer tous les coefficients binomiaux précédents mais permet d'éviter le calcul des factorielles.

Démonstration.
Soit A un ensemble à $n+1$ éléments. On considère un élément fixé que l'on note x_1.
Il y a $\binom{n+1}{k+1}$ sous-ensembles de A ayant $k+1$ éléments.
On va calculer ce nombre de sous-ensembles d'une autre façon afin d'établir la formule annoncée.

Pour choisir un sous ensemble de A ayant $k+1$ éléments, on peut commencer par choisir si x_1 appartient à ce sous ensemble.
Si x_1 appartient au sous-ensemble, il reste alors à choisir k éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
Si x_1 n'appartient pas au sous-ensemble, il reste à choisir $k+1$ éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités.
Au total, le nombre de sous-ensembles possibles est $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$, d'où le résultat. □

Remarque.
La relation de Pascal permet de construire le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**. Chaque coefficient s'obtient en ajoutant le coefficient au dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.

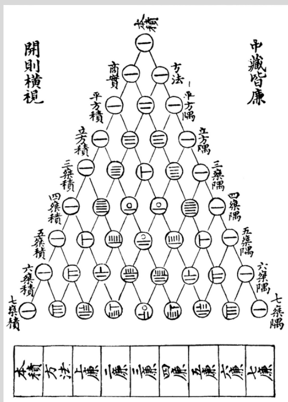
n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

D'après le tableau, on sait par exemple que $\binom{4}{2}=6$.

Exemple.
Dans un lycée, sept spécialités sont proposées. Un élève de première choisit trois spécialités parmi les sept. Le nombre de choix possibles de triplets de spécialités est $\binom{7}{3}=35$.

Histoire – Coefficients binomiaux

On désigne généralement par « triangle de Pascal » le tableau décrit ci-dessus. Ce triangle était en réalité déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise Pascal. Il était connu des mathématiciens persans au X^e siècle mais aussi en Chine à partir du XIII^e siècle. Plus tard, au XVII^e siècle, l'apport de **Blaise Pascal** (1623-1662) sera de proposer une démonstration rigoureuse de la relation qui portera son nom. Pour la démontrer, il met en place une version aboutie du raisonnement par récurrence.



Triangle arithmétique (Chine, XIII^e - XIV^e siècles)

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Effectuer des dénombrements simples en utilisant un arbre ou un tableau
- Différencier et utiliser en contexte une permutation, un arrangement et une combinaison
- Manipuler les coefficients binomiaux.