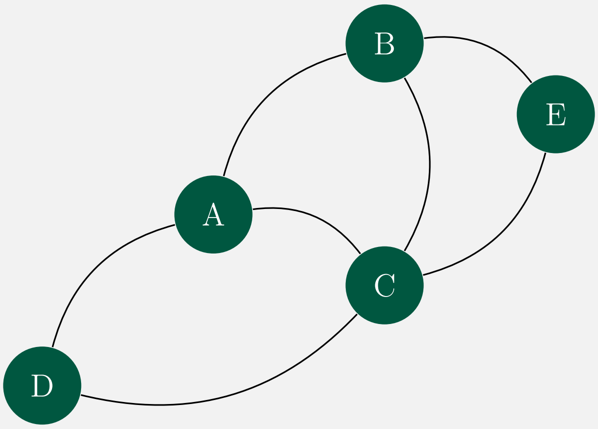
Matrices et théorie des graphes – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆		17	1, 5, 13, 14, 17	2	13, 14	
Exercices ⋆⋆	3	3, 4, 19	4, 12, 15, 16, 19	3	6, 7, 8, 15, 16, 19	
Exercices ⋆⋆⋆	18, 22, 23, 24, 25	20, 21, 23, 24, 25		18	9, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25	21

Exercice 1 ⋆ [Représenter]

On considère le graphe suivant :



Donner son ordre et le degré de chaque sommet. Déterminer par ailleurs une chaîne de longueur 4 de ce graphe.

Exercice 2 ⋆ [Raisonner]

On considère un graphe simple d'ordre supérieur ou égal à 2. Est-il possible qu'il y ait un nombre impair de sommets de degrés impairs ?

Exercice 3 ⋆⋆ [Modéliser, Raisonner, Chercher]

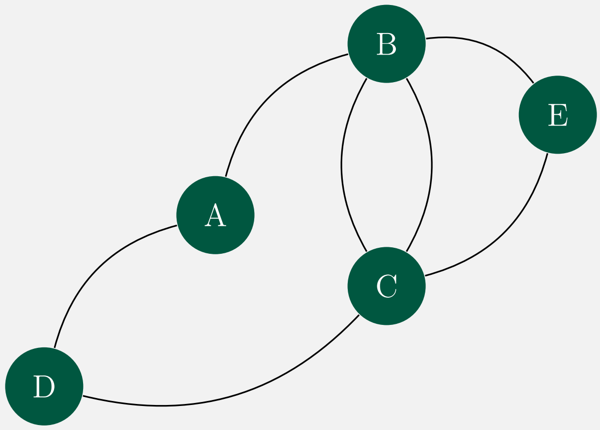
Montrer que dans un groupe de personnes, il y a toujours au moins deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

Exercice 4 ⋆⋆ [Modéliser, Représenter]

M. Dupont est mort assassiné dans la nuit du 10 au 11 septembre 2021 dans une maison isolée. Sept autres personnes étaient présentes dans cette maison. Un inspecteur de police interroge ces sept personnes. Chacune affirme, en guise d'alibi, avoir passé la nuit avec trois des autres suspects mais ne pas avoir eu de contact avec M.dupont durant la nuit du crime. Après réflexion, l'inspecteur est convaincu qu'au moins l'une des sept personnes ment. Pourquoi ?

Exercice 5 ⋆ [Représenter]

On considère le graphe suivant :



Combien y'a-t-il de chaînes de longueur 5 allant du sommet B au sommet E ?

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire A^n.

Exercice 8 ⋆⋆ [Calculer]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de A et en déduire A^n.

Exercice 9 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 10 ⋆⋆⋆ [Calculer]

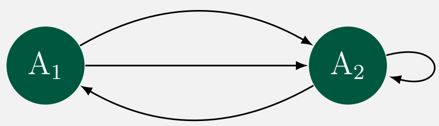
Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 11 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 12 ⋆⋆ [Représenter, Calculer]

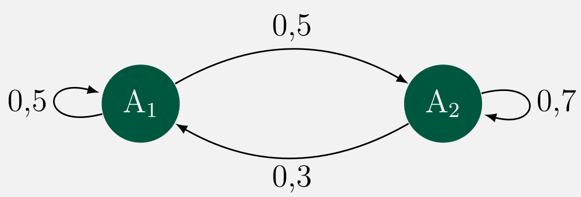
Soit $n \geqslant 1$. On considère le graphe suivant :



Déterminer le nombre de chemins de longueur n allant du sommet A_1 au sommet A_2.

Exercice 13 ⋆ [Calculer, Représenter]

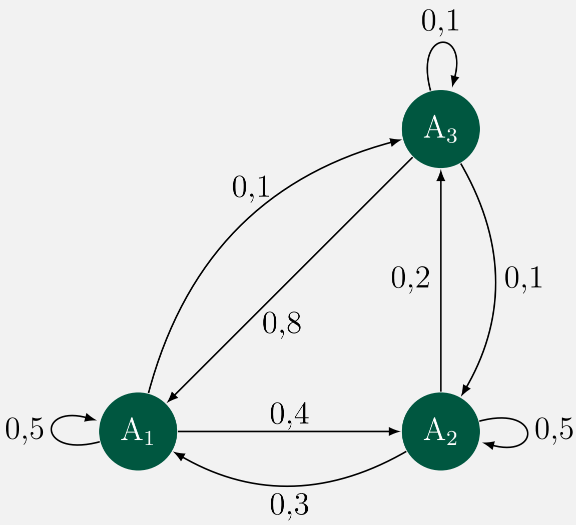
On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant et la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.



Déterminer la probabilité d'être à l'état A_1 après 3 itérations.

Exercice 14 ⋆ [Calculer, Représenter]

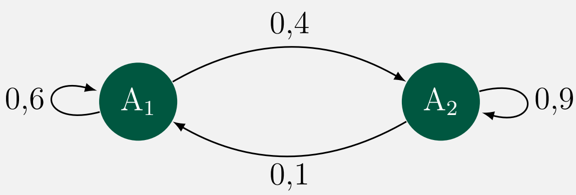
On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant et la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.



Déterminer la probabilité d'être à l'état A_2 après 2 itérations.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

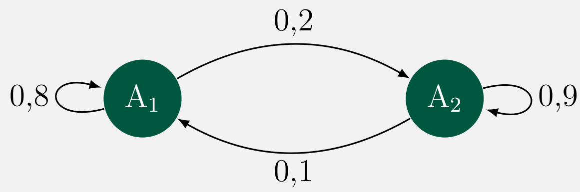
On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant et la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.



Déterminer la probabilité d'être à l'état A_1 après 50 itérations.

Exercice 16 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

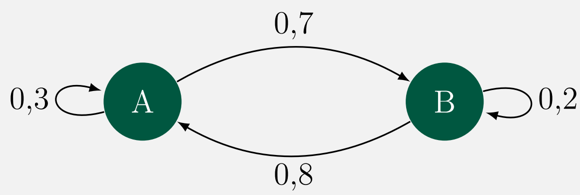
On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant et la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.



Déterminer la probabilité d'être sur l'état A_1 après 50 itérations.

Exercice 17 ⋆ [Modéliser, Représenter]

Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous. Pour tout entier naturel n, on note p_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et q_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B. Vrai ou faux ?

Exercice 18 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Chercher]

Soit (X_n) une chaîne de Markov qui admet une distribution invariante π. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_{3n}$. Montrer que π est une mesure invariante de la chaine de Markov (Y_n).

Exercice 19 ⋆⋆ [Modéliser, Représenter, Calculer]

Un fumeur qui fume tous les jours souhaite arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

À long terme, peut-on affirmer que le fumeur arrêtera de fumer ?

Exercice 20 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état. La probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6. On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable. On note an la probabilité que l'atome soit dans un état stable et bn la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

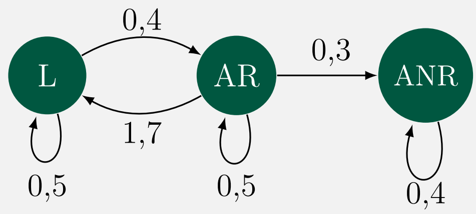
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993025$ et $b_2 = 0{,}006975$.
2. Déterminer la matrice A (matrice de transition) telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n \mathrm{A}$.
3. Calculer A^n.
4. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Exercice 21 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Communiquer]

L'utilisation de modèles matriciels pour décrire des dynamiques de populations est apparu dans les années 1940. Le modèle ci-dessous a ensuite été introduit en 1965 par Leonard Lefkovitch.

Une population d'insectes est structurée en trois classes (larves (L), adultes reproductifs (AR) et adultes non reproductifs (ANR)). L'évolution des effectifs semaines après semaines est modélisé par le graphe pondéré suivant.



1. Expliquer pourquoi la somme des coefficients partant d'une même arrête n'est pas égale à 1.
2. Montrer qu'au fil des semaines, la proportion de larves parmi la population d'insectes tend vers $\frac{12}{17}$.

Exercice 22 ⋆⋆⋆ [Calculer, Chercher]

On considère deux réels a et b tels que l'équation $X^2 = aX + b$ admette deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Soient par ailleurs deux réels x et y. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x$, $u_1 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Pour tout n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathrm{A}^n X_0$.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, r_1, r_2, x et y.

Exercice 23 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Chercher]

On lance n fois ($n \geqslant 1$) une pièce équilibrée, tous les lancers étant supposés indépendants les uns des autres. On note p_n la probabilité que n'apparaissent jamais deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:
$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n.$$
2. En utilisant la méthode de l'exercice 28, en déduire l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 24 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Chercher]

On considère le jeu suivant : un joueur lance une pièce à Pile ou Face avec une pièce déséquilibrée qui donne Pile avec une probabilité $\frac{2}{3}$. S'il tombe sur Pile, il gagne 1€. S'il tombe sur Face, il perd 1€. Il commence avec n euros en poche. S'il parvient à récolter 100 euros, la partie s'arrête et le joueur à gagner. Cependant, s'il arrive à 0 euros, la partie s'arrête également et il a perdu. On note p_n la probabilité qu'il gagne sachant qu'il a commencé la partie avec n euros.

1. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1}, p_n et p_{n-1}.
2. En utilisant la méthode de l'exercice 28, déterminer p_n en fonction de n.

Exercice 25 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Chercher]

On considère une urne 1 dans laquelle est placée deux boules blanches et une urne 2 dans laquelle est placée deux boules noires. À chaque étape, on tire au hasard une boule de chaque urne et on les échange. On note alors X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne 1 après avoir réalisé n échanges. Déterminer la loi de probabilité de X_n.