Lycée Lucie Aubrac - Terminale

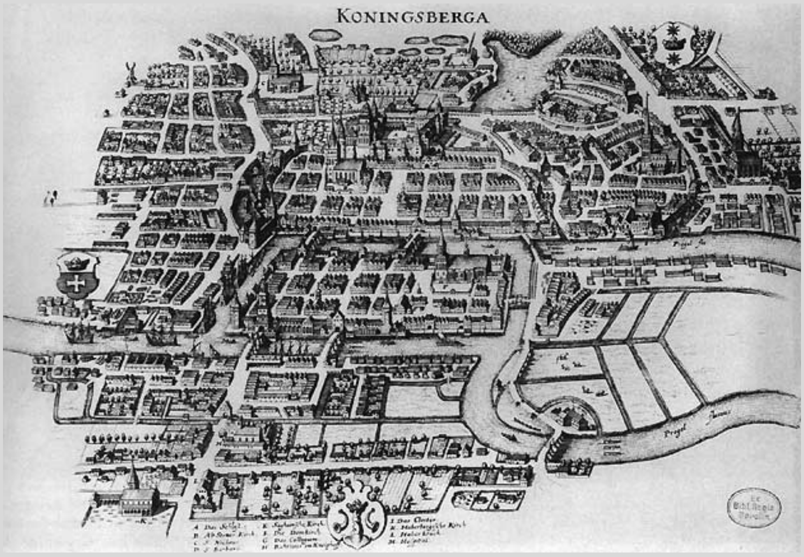
Chapitre 9
Matrices et Théorie des Graphes

Table des matières

1 Les graphes

Histoire – Introduction des graphes par Euler

Le mathématicien suisse **Leonhard Euler (1707-1783)** est généralement cité comme étant l'inventeur de la théorie des Graphes. Dans un article présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 puis publié en 1741, il traitait du problème des sept ponts de Königsberg (Russie). Le problème consistait à déterminer un chemin passant exactement une fois par chaque pont de la ville. Euler a démontré que ce problème n'admet pas de solution en raisonnant à partir d'un graphe.

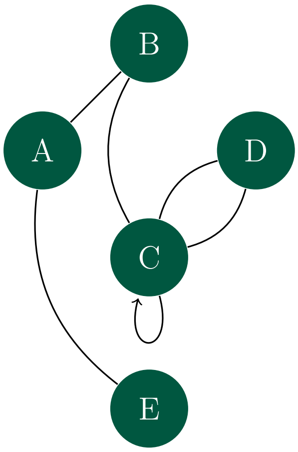


1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

- Un graphe est une représentation composée de **sommets** reliés par des **arêtes**.
- Une arête reliant un point à lui-même est appelée une **boucle**.
- S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on dit qu'il s'agit d'**arêtes multiples**.
- Un graphe ne présentant ni arête multiple, ni boucle est appelé **graphe simple**.

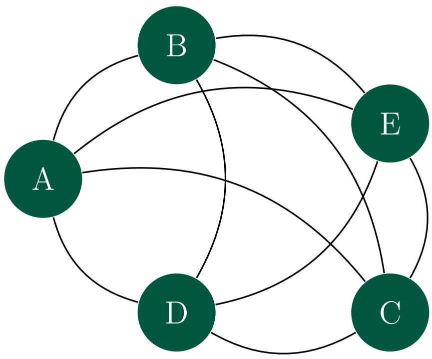
Exemple.
Le graphe suivant est composé de 5 sommets et de six arêtes. Il y a une boucle en C et des arêtes multiples entre C et D. Le graphe n'est donc pas un graphe simple.



Définition 2

- Le nombre de sommets d'un graphe est appelé l'**ordre** du graphe.
- Le nombre d'arêtes issues d'un sommet est appelé le **degré** du sommet.
- Deux sommets qui sont reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemple. Le graphe considéré précédemment n'est pas complet car, par exemple, le point A n'est pas relié au point C. En revanche, le graphe ci-dessous est complet.



Proposition 1 – Lemme des poignées de mains

Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

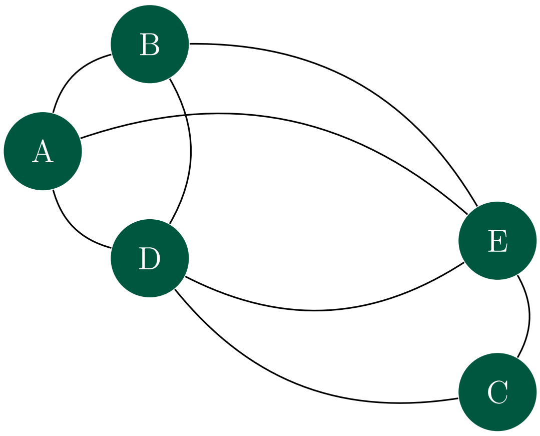
Démonstration.
Lorsque l'on additionne les degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois : une fois pour chaque extrémité. □

1.2 Chaînes et cycles

Définition 3

- Dans un graphe, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus).
- La **longueur** de la chaîne est le nombre d'arêtes la composant.
- Un **cycle** est une chaîne composée d'arêtes distinctes dont les deux extrémités sont confondues.

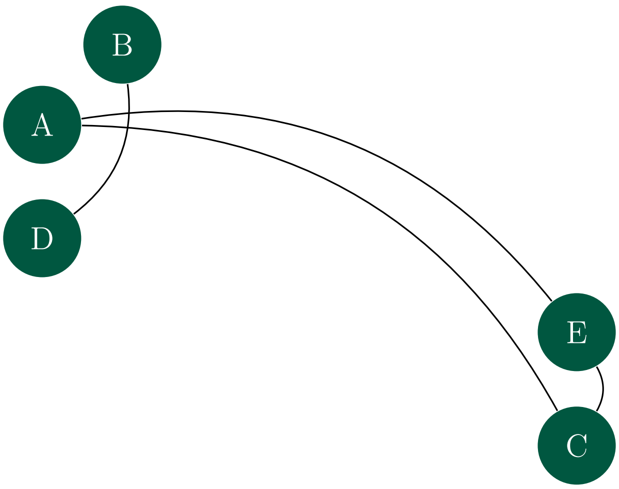
Exemple.
Sur le graphe ci-dessous, A–E–C–E–D est une chaîne de longueur 4.
De plus, A–E–D–A est un cycle de longueur 3.



Définition 4

Un graphe est **connexe** lorsque chaque couple de sommets peut être relié par une chaîne.

Exemples.
L'ensemble des graphes considérés précédemment sont des graphes connexes. En revanche, le graphes ci-dessous n'est pas connexe.



1.3 Graphes orientés

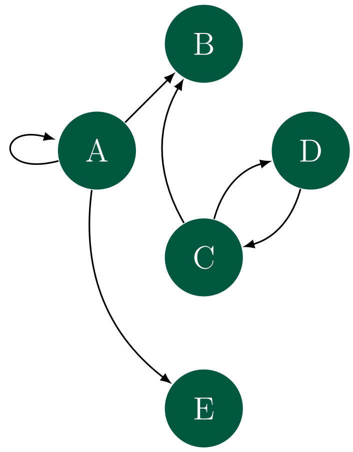
Définition 5

- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours.
- Dans un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.

Remarque.
Un chemin dans un graphe orienté est l'analogue d'une chaîne dans un graphe non orienté.

Exemple.

Sur le graphe ci-contre, il existe un chemin de longueur 2 allant du sommet D au sommet B mais il n'existe aucun chemin allant du sommet B au sommet D.



2 Application des matrices à l'étude des graphes

2.1 Matrice d'adjacence d'un graphe

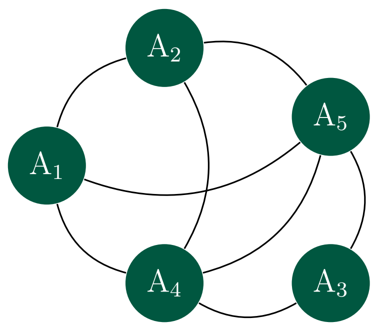
Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un graphe d'ordre n (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant. La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre d'arrêtes qui vont sommet i au sommet j.

Exemple.

La matrice d'adjacence du graphe ci-contre est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Proposition 2

Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant. Le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

Démonstration.
On considère un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(k)$ « Pour tout i et pour tout j, le terme de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A^k est égal au nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j ».

- **Initialisation :** Pour $k = 1$, la propriété est vraie par définition de la matrice d'adjacence du graphe.
- **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A^k. On souhaite en fait dénombrer les chaînes (ou de chemins) de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j. Or, définir une telle chaîne (ou un tel chemin) revient exactement à définir une chaîne (ou un chemin) de longueur k reliant le sommet i à un sommet l puis définir une arrête du sommet l au sommet i. Par hypothèse de récurrence, on sait que le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i à un sommet l est $a_{i,l}^{(k)}$. De plus, par définition de la matrice d'adjacence, le nombre d'arrêtes reliant le sommet l au sommet j est $a_{l,j}$.

$$i \xrightarrow[a_{i,l}^{(k)} \text{ chaînes de longueur } k]{} l \xrightarrow[a_{l,j} \text{ arrêtes}]{} j$$

Par conséquent, le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j et dont la dernière arrête est $(l; j)$ est donc $a_{i,l}^{(k)} a_{l,j}$. Finalement, le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j est :

$$\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}^{(k)} a_{l,j}.$$

Il s'agit, par définition du produit de la matrice A^k par la matrice A, du coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A^{k+1}.
Ainsi, on a montré que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

□

2.2 Calcul effectif des puissances d'une matrice A

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les puissances d'une matrice.

2.2.1 Conjecturer une formule pour A^n

Exemple.
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Solution :
On commence par calculer les premières puissances de A.
$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
On conjecture que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on va démontrer cette égalité par récurrence sur n.
Il est clair que l'égalité est vraie pour $n = 1$.
On suppose ensuite que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{n+1} &= \mathrm{A} \times \mathrm{A}^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cela prouve donc que l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

2.2.2 Utiliser un polynôme annulateur de A

Exemple.
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en remarquant que $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_2 = 0$.

Remarque.
On dit que le polynôme $X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

Solution :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc montré la relation demandée.

Par ailleurs, en effectuant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$, on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(R) \leqslant 1$ tels que

$$X^n = (X^2 - 5X + 4) \times Q(X) + R(X).$$

Comme $\deg(R) \leqslant 1$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = aX + b$. Ainsi,

$$X^n = (X^2 - 5X + 4) \times Q(X) + aX + b.$$

En évaluant l'égalité précédente pour $X = 1$ et $X = 4$ (les racines de $X^2 - 5X + 4$), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1^n = (1^2 - 5 \times 1 + 4) \times Q(1) + a \times 1 + b \\ 4^n = (4^2 - 5 \times 4 + 4) \times Q(4) + a \times 4 + b \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 = a + b \\ 4^n = 4a + b \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ b = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^n &= (\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_2) \times Q(\mathrm{A}) + R(\mathrm{A}) \\ &= R(\mathrm{A}) \\ &= \frac{4^n - 1}{3}\mathrm{A} + \frac{4 - 4^n}{3}\mathrm{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2(4^n - 1)}{3} + \dfrac{4 - 4^n}{3} & \dfrac{2(4^n - 1)}{3} \\ \dfrac{4^n - 1}{3} & \dfrac{1 + 2 \times 4^n}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.3 Déterminer une matrice inversible P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est diagonale

Exemple.
Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Solution :
Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
On note $\vec{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \text{ est diagonale} \iff & \text{ Il existe } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \iff & \text{ Il existe } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que, pour } i \in \{1\,;2\}, \\ & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\vec{e_i} = \lambda_i \vec{e_i} \\ \iff & \text{ Il existe } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que, pour } i \in \{1\,;2\}, \\ & \mathrm{AP}\vec{e_i} = \lambda_i \mathrm{P}\vec{e_i} \qquad (\star) \end{aligned}$$

Cela nous pousse à chercher des vecteurs non nuls X tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ (de tels vecteurs sont appelés des **vecteurs propres** de A).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} &\iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Si $\lambda = 1$, on trouve $x_1 = x_2 = 0$ et cela ne fournit pas de solution pertinente pour notre problème.
- Si $\lambda \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \quad &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{1-\lambda} L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ (2-\lambda)x_2 - \frac{6}{1-\lambda} x_2 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ \frac{\lambda^2 - 3\lambda - 4}{1-\lambda} x_2 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ \frac{(\lambda+1)(\lambda-4)}{1-\lambda} x_2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

  Ce système admet des solutions non nuls pour x_1 et x_2 si, et seulement si, $\frac{(\lambda+1)(\lambda-4)}{1-\lambda} = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 4$. Dans ce cas, les solutions du système sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2x_2}{\lambda - 1} \, ; x_2 \right), \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

  En particulier :
  - Pour $\lambda = -1$: le vecteur $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (obtenu pour $x_2 = 1$) vérifie $\mathrm{AX} = -\mathrm{X}$.
  - Pour $\lambda = 4$: le vecteur $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (obtenu pour $x_2 = 3$) vérifie $\mathrm{AX} = 4\mathrm{X}$.

D'après l'égalité $(\star)$, on souhaite définir une matrice P telle que $\mathrm{P}\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et telle que $\mathrm{P}\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On pose donc $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
On a alors $\mathrm{P}^{-1} = -\dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.
Par conséquent, $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(PDP^{-1}\right)^n \\
&= \left(PDP^{-1}\right) \times \left(PDP^{-1}\right) \times \ldots \times \left(PDP^{-1}\right) \\
&= PD^nP^{-1} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{3\times(-1)^n + 2\times 4^n}{5} & \dfrac{2\times(-1)^{n+1} + 2\times 4^n}{5} \\ \dfrac{3\times(-1)^{n+1} + 3\times 4^n}{5} & \dfrac{2\times(-1)^n + 3\times 4^n}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque.
Le polynôme en l'inconnue λ dont le coefficient dominant est 1 et dont les racines sont les valeurs pour lesquelles il existe un vecteur X tel que $AX = \lambda X$, est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice A. Dans l'exemple précédent, le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-4) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$.

La méthode exposée fonctionne notamment à chaque fois que le polynôme caractéristique admet des racines simples. Il est par ailleurs possible de montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice A est toujours un polynôme annulateur de A (théorème de Cayley-Hamilton). Cela fournit donc une méthode de calcul de A^n même dans le cas où le polynôme caractéristique admet des racines multiples (sous réserve d'être capable de déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme caractéristique)

3 Chaînes de Markov

3.1 Définitions

Définition 7

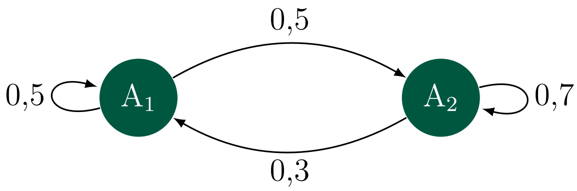
Un **graphe pondéré** est un graphe pour lequel on attribue un nombre réel positif à chacune des arrêtes. Ce nombre est appelé le **poids** de l'arrête.

Définition 8

Un graphe probabiliste est un graphe sans arrête multiple, orienté et pondéré tel que les poids sont compris entre 0 et 1 et tels que la somme des poids des arrêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple.

Le graphe ci-contre est un graphe probabiliste à deux états A_1 et A_2.



Définition 9

Soit Ω un espace de probabilité et un ensemble fini $E = \{A_1 ; A_2 ; \dots ; A_s\}$.

- Une **chaîne de Markov** est une suite de variables aléatoires $X_n : \Omega \longrightarrow E$ telle que,
  pour tous $x_1, x_2, \dots x_k, x_{k+1} \in E$:

$$P_{\{X_0=x_0 ; X_1=x_1 ; \dots ; X_k=x_k\}}(X_{k+1} = x_{k+1}) = P_{\{X_k=x_k\}}(X_{k+1} = x_{k+1}).$$

- L'ensemble E est appelé **espace des états** de la chaîne de Markov.
- La probabilité $P_{\{X_k=x_k\}}(X_{k+1} = x_{k+1})$ est appelée **probabilité de transition** de l'état x_k à l'état x_{k+1}.

Remarque.
Une chaîne de Markov peut se représenter à l'aide d'un graphe probabiliste où chaque sommet représente un état et où les poids correspondent aux probabilités de transition.

Définition 10

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov.
La loi de probabilité de X_0 est appelée la **distribution initiale** de la chaîne de Markov.

3.2 Matrice de transition d'une chaîne de Markov

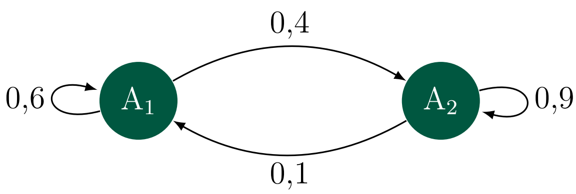
Définition 11

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et $E = \{A_1 ; A_2 ; \dots ; A_s\}$ l'espace des états.
La **matrice de transition** P de la chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre s telle que, pour tous i et j, la probabilité de transition de l'état A_i à l'état A_j, est le coefficient $p_{i,j}$.

Exemple.

On considère une chaine de Markov représentée par le graphe ci-contre. Sa matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$



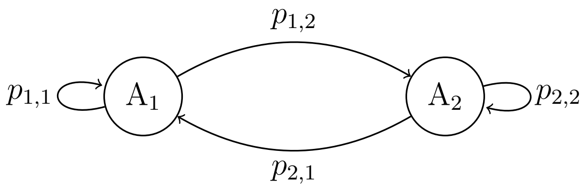
Remarque.
Dans une matrice de transition, tous les coefficients d'une matrices de transition sont des réels compris entre 0 et 1. De plus, la somme des coefficients d'une ligne est égale à 1.

Proposition 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et P sa matrice de transition. On note de plus π_0 la distribution initiale et plus généralement π_n la matrice ligne correspondant à la loi de probabilité de X_n. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \pi_n = \pi_0 \mathrm{P}^n.$$

Démonstration.
On va démontrer cette proposition dans le cas particulier d'une chaîne de Markov à deux états A_1 et A_2.
Soit donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à deux états et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$ sa matrice de transition.



On va montrer que $\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P}$.
En fait, π_{n+1} est la matrice ligne suivante :

$$\pi_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{n+1} = \mathrm{A}_1) & \mathrm{P}(X_{n+1} = \mathrm{A}_2) \end{pmatrix}$$

Or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_{n+1} = \mathrm{A}_1) &= \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_1) \times \mathrm{P}_{\{X_n = \mathrm{A}_1\}}(X_{n+1} = \mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_2) \times \mathrm{P}_{\{X_n = \mathrm{A}_2\}}(X_{n+1} = \mathrm{A}_2) \\ &= \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_1) p_{1,1} + \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_2) p_{2,1} \end{aligned}$$

De même, on montre que :

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = \mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_1) p_{1,2} + \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}_2) p_{2,2}$$

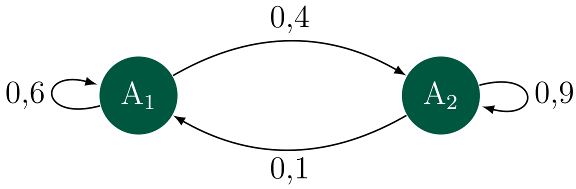
Ces deux égalités correspondent exactement à l'égalité matricielle $\pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{P}$.
On en déduit ensuite, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = \pi_0 \mathrm{P}^n$. □

Remarque.
Une chaîne de Markov est uniquement déterminée par sa matrice de transition et sa distribution initiale.

Exemple.

On considère une chaine de Markov définie par le graphe ci-contre et par la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. La loi de X_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \pi_0 \mathrm{P}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Cela signifie donc qu'en partant de l'état A_1, on sera, après 3 étapes, en A_1 avec une probabilité 0,3 et en A_2 avec une probabilité 0,7.

3.3 Distribution invariante d'une chaîne de Markov

Définition 12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à s états et P sa matrice de transition. Si π est une matrice ligne telle que $\pi \mathrm{P} = \pi$, on dit que π est une distribution invariante de la chaîne de Markov.

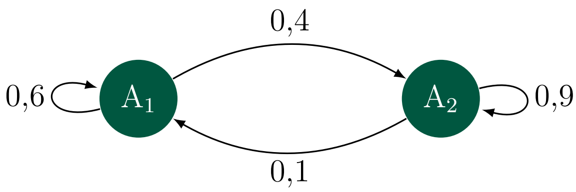
Proposition 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la distribution initiale est π_0. On note de plus π_n la distribution de X_n.
Si pour tout i et pour tout j, $p_{i,j} \neq 0$, alors la chaîne de Markov admet une unique distribution invariante π et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \pi.$$

Exemple.

On considère à nouveau la chaine de Markov représentée par le graphe ci-contre . La distribution invariante est la matrice ligne $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ telle que :



$$\begin{aligned}
& \pi \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \pi \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \begin{cases} 0{,}6x + 0{,}1y = x \\ 0{,}4x + 0{,}9y = y \end{cases} \\
\iff \quad & 4x = y \text{ (les deux équations sont équivalentes)}
\end{aligned}$$

Comme on sait par ailleurs que $x + y = 1$, on obtient $x = \dfrac{1}{5}$ et $y = \dfrac{4}{5}$. Ainsi, quelle que soit la distribution initiale, la distribution de X_n va converger vers $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Histoire – Chaînes de Markov

Le russe **Andreï Markov (1856-1922)** a publié les premiers résultats sur les chaînes qui porteront son nom en 1906. Dans les années 1930, **Andreï Kolmogorov (1903-1987)** a également proposé une généralisation dans le cas où l'espace des états est infini. Au départ liées à la physique statistique, les chaînes de Markov se sont ensuite appliquées à d'autres domaines. En informatique, elles ont par exemple été mobilisées par **Claude Shannon (1916-2001)** en 1948 dans le célèbre article *A Mathematical Theory of Communication* où Shannon crée la théorie de l'information.

Markov

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Déterminer le nombre de chaînes de longueurs données reliant un sommet à un autre.
- Calculer la puissance d'une matrice
- Déterminer les distributions successives d'une chaîne de Markov ainsi que la distribution invariante.
- Modéliser un problème à l'aide d'un graphe ou d'une chaîne de Markov.