Matrices et Systèmes linéaires – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆	4, 10			6, 11, 12	1, 4, 6, 8, 10, 11, 14, 15	12
Exercices ⋆⋆		16	7	5, 9	2, 3, 13, 16, 17	5, 9
Exercices ⋆⋆⋆	18	18, 19			18, 19	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \\ 5x + y + z = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 3x + y - 7z = 1 \end{cases}$

Exercice 2 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 5y + z = 2 \\ -3x + y + 2z = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5x + 13y = 4 \end{cases}$

Exercice 3 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} mx + y - z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 ⋆ [Chercher, Calculer]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$. Montrer que $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Exercice 5 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k)$.
Montrer que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^k)$.

Exercice 6 ⋆ [Raisonner, Calculer]

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix} \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x^2+3y \end{pmatrix} \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y+1 \\ 3x-y \end{pmatrix} \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+y \\ 2x-iy \end{pmatrix} \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ -2x-7y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{cases}$
6. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+z-1 \\ -2x-y+2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 7 ⋆⋆ [Représenter]

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application qui à vecteur du plan OM associe le vecteur OM' où M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$. Cette application est-elle une application linéaire ?
2. La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle une application linéaire ?

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Déterminer le produit des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Montrer que tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-5y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 10 ⋆ [Calculer, Chercher]

Déterminer deux matrices A et B d'ordre deux telles que AB $\neq$ BA.

Exercice 11 ⋆ [Calculer, Raisonner]

Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles d'ordre n. Montrer que la matrice A $\times$ B est inversible.

Exercice 12 ⋆ [Raisonner, Communiquer]

On considère une matrice A de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{3,3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} \neq 0$.

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer]

Montrer que pour tout A $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout B $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Exercice 14 ⋆ [Calculer]

Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse dans le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 15 ⋆ [Calculer]

Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse dans le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 16 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Dans une cafétéria, Alice, Bob et Charlie ont l'habitude de prendre leur pause et de consommer du café, du thé ou un chocolat chaud. À la fin de l'année, ils font les comptes. Au total, Alice a commandé 12 cafés, 3 thés et 10 chocolats chauds. En tout, elle a dépensé 55,1 euros. Bob a commandé 1 café, 17 thés et 2 chocolats chauds. En tout, il a dépensé 56,9 euros. Enfin, Charlie a commandé 21 cafés, 3 thés et 5 chocolats chauds pour un total de 49,9 euros. Déterminer le prix d'un café, d'un thé et d'un chocolat chaud.

Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer]

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & - & 4t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 2 \\ -6x & + & y & + & 5z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 2t & = & 1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & - & 4t & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & -1 \\ -6x & + & y & + & 5z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 18 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Chercher]

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur le choix d'une matrice A vérifiant les conditions suivantes :

- $\det(\mathrm{A}) \neq 0$;
- $\det(\mathrm{A})$ est premier avec 26.

Dans toute la suite, on considérera le cas où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A - Étude de la matrice A

1. Justifier que la matrice A vérifie bien les conditions demandées par l'énoncé.
2. Déterminer A^{-1}.

Partie B – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1 : On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entre 0 et 25 à l'aide du tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25

Étape 2 : On divise le texte à chiffrer en bloc de deux lettres successives. On obtient ainsi plusieurs blocs de nombres $(x_1; x_2); \ldots; (x_{n-1}; x_n)$.

Étape 4 : On réduit modulo 26 chacun des y_k : plus précisément, pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, on calcule le reste r_k de la division de y_k par 26. On obtient donc une liste de nombres $r_1, \ldots, r_n$.

Étape 5 : On transforme la liste des r_k en un texte en associant chaque nombre r_k à une lettre grâce au tableau précédent.

Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.
Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie C - Déchiffrement

1. On cherche ici un moyen de déchiffrer un texte chiffré par le procédé précédent. Sans perte de généralité, on peut se restreindre au déchiffrement d'un texte composé uniquement du bloc $(r_1; r_2)$ correspondant au couple de nombres $(y_1; y_2)$ obtenu après transformation des nombres $(x_1; x_2)$ du texte initial. Montrer que x_1 et x_2 vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 9r_1 + 16r_2\,[26] \\ x_2 & = & 17r_1 + 25r_2\,[26] \end{array}\right.$$

2. Déchiffrer le mot suivant : VLUP.
3. Une analyse fréquentielle des lettres apparaissant dans un message chiffré à l'aide du chiffrement de Hill semble-t-elle pertinente pour celui qui voudrait casser le code ?

Exercice 19 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une **clé de contrôle** $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires
   (a) Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
   (b) Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
   Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :
   - la valeur de c_1 est inchangée ;
   - la valeur de c_2 est modifiée ;
   - la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

   Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

   On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.

   Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

bit erroné / bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							