Arithmétique – Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆	12			17, 18, 19	1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 24, 25	
Exercices ⋆⋆	7, 13, 16, 20		7	5, 6, 20, 26	5, 6, 13, 15, 16, 28	15, 26, 28
Exercices ⋆⋆⋆	21, 22, 23, 27, 29, 31, 32	29, 30, 31, 32		21, 22, 23, 27	30	27, 32

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Déterminer les diviseurs positifs des nombres suivants :
$15\,;27\,;23\,;51\,;111\,32$.

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Déterminer les entiers naturels n tels que 7 divise $n+3$.

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Déterminer les entiers naturels n tels que 11 divise $2n+5$.

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Déterminer les entiers naturels n tels que 2 divise $4n-3$.

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 2^n$ est divisible par 5.

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Déterminer l'ensemble des entiers naturels a tels que $a^2 - 24$ soit le carré d'un entier naturel.

Exercice 7 ⋆⋆ [Chercher, Représenter]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{12}{x-1}$. Déterminer l'ensemble des points de la courbe représentative de f qui sont à coordonnées entières.

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n+5$ divise $7n+3$.

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+7$ soit divisible par n.

Exercice 10 ⋆ [Calculer]

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+3$ divise $2n+5$.

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $4n+3$ soit divisible par $3n+4$.

Exercice 12 ⋆ [Calculer, Chercher]

Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $a^2-9b^2=24$.

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer, Chercher]

Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x+y=xy$.

Exercice 14 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer le quotient et le reste de la division de m par n.

1. $m=103 \quad \text{et} \quad n=7$
2. $m=13 \quad \text{et} \quad n=17$
3. $m=-60 \quad \text{et} \quad n=11$
4. $m=-33 \quad \text{et} \quad n=-4$
5. $m=-33 \quad \text{et} \quad n=44$

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Communiquer]

Dans tout l'exercice, n et m désignent des entiers naturels. Répondre par Vrai ou Faux. Justifier.

1. Si le reste de la division euclidienne de n par 7 est 4 et le reste de la division euclidienne de m par 7 est 2, alors le reste de la division euclidienne de $n+m$ par 7 est 6.
2. Si le reste de la division euclidienne de n par 7 est 4 et le reste de la division euclidienne de m par 7 est 2, alors le reste de la division euclidienne de $n\times m$ par 7 est 8.
3. Si le reste de la division euclidienne de n par 7 est 5 et le reste de la division euclidienne de m par 10 est 5, alors le reste de la division euclidienne de $n+m$ par 17 est 5.
4. Si le reste de la division euclidienne de n par 7 est 0 et le reste de la division euclidienne de m par 5 est 0, alors le reste de la division euclidienne de $n+m$ par 12 est 0.
5. Si le reste de la division euclidienne de n par 12 est 1 et le reste de la division euclidienne de m par 4 est 2, alors le reste de la division euclidienne de $n+m$ par 4 est 3.
6. Si le reste de la division euclidienne de n par 15 est 3 et le reste de la division euclidienne de m par 5 est 2, alors le reste de la division euclidienne de $n+m$ par 15 est 5.

Exercice 16 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Déterminer le reste de la division de 335^{112} par 7.

Exercice 17 ⋆ [Calculer, Raisonner]

Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 18 ⋆ [Calculer, Raisonner]

Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+7)(3n+1)$ est divisible par 3.

Exercice 19 ⋆ [Calculer, Raisonner]

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5n^2+3$ est divisible par 4.

Exercice 20 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que p^2-1 est divisible par 24.

Exercice 21 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 7n-5$. Déterminer le nombre de carrés parfaits parmi les 2022 premiers termes de la suite.

Exercice 22 ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner]

Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que p divise 2^n-1.

Exercice 23 ⋆⋆ [Chercher, Raisonner]

Soit n un carré parfait dont le chiffre des unités est 5. Déterminer sont chiffre des dizaines. La condition établie sur les chiffre des dizaines est-elle une condition nécessaire et suffisante ?

Exercice 24 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer si a est inversible modulo n et déterminer l'inverse le cas échéant.

1. $a=3$ et $n=7$
2. $a=3$ et $n=10$
3. $a=4$ et $n=12$
4. $a=6$ et $n=9$
5. $a=9$ et $n=16$

Exercice 25 ⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x \equiv 1\,[11]$
2. $3x \equiv 4\,[12]$
3. $5x \equiv 7\,[14]$
4. $5x \equiv 6\,[8]$

Exercice 26 ⋆⋆ [Communiquer, Raisonner]

1. Énoncer la règle de divisibilité par 5 puis la démontrer.
2. Énoncer la règle de divisibilité par 5 puis la démontrer.

Exercice 27 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

La propriété de décomposition d'un entier naturel n en base 10 s'énonce ainsi : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ et des entiers uniques a_0, a_1, $\ldots a_r$ tels que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, $a_r \neq 0$ et $n = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k 10^k$ ».

1. Énoncer de manière similaire la propriété de décomposition d'un entier naturel n en base 2.
2. Démontrer la propriété énoncée à la question 1.
3. Décomposer l'entier 113 en base 2.

Exercice 28 ⋆⋆ [Communiquer, Calculer]

Les entiers 1 ; 11 ; 111 ; ... sont appelés des reps-units. On note N_p le rep-unit comprenant p fois le chiffre 1, c'est-à-dire

$$N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

1. (a) Montrer que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   (b) En déduire que, pour tout $p \geqslant 1$, 9 divise $10^p - 1$.
2. (a) Déterminer le reste de la division de 10^p par 7 suivant les valeurs de p.
   (b) En déduire les valeurs de p pour lesquelles N_p est divisible par 7.
3. Montrer que si p est pair, N_p est divisible par 11.

Exercice 29 ⋆⋆ [Modéliser, Chercher]

En informatique, un octet est composé de huit bits (0 ou 1). Plus précisément, il est composé de sept bits contenant l'information à transmettre auquel on ajoute un bit de parité de la façon suivante : on calcule la somme s des sept bits constituant l'octet et on prend m tel que $s + m \equiv 0\,[2]$.

1. Déterminer le bit de parité de 1011101
2. Démontrer que si un seul des sept bits contenant l'information est modifié, le bit de parité détecte l'erreur.
3. Dans quel cas les erreurs de transmission seront-elles détectées ? Justifier.

Exercice 30 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

On souhaite chiffrer un message. On procède de la manière suivante

- Chaque lettre du texte à chiffrer est associée à un entier x entre 0 et 25 selon la correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19

U	V	W	X	Y	Z
20	21	22	23	24	25

- A chaque entier x, on associe l'entier y tel que $\begin{cases} y \equiv 21x + 2\,[26] \\ 0 \leqslant y \leqslant 25 \end{cases}$.
- On remplace la lettre du message par la lettre correspondant au nombre y .

1. Montrer que le mot MATHS est chiffré par le mot UCLTQ ?
2. L'objectif de cette question est de déchiffrer le mot suivant :

   LGVOPY

   (a) Montrer que si x est un entier et y l'entier qui lui est associé par chiffrement, alors $x = 5y - 10\,[26]$.
   (b) En déduire le message clair correspondant à LGVOPY.

Exercice 31 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Chercher]

Le numéro INSEE d'un personne est inscrit sur sa carte vitale. Il est composé de 13 chiffres correspondant à :

- le sexe (1 pour un homme et 2 pour une femme) ;
- l'année de naissance (deux chiffres)
- le mois de naissance (deux chiffres)
- le lieux de naissance (cinq chiffres correspondant au département et à la commune)
- le numéro d'ordre d'inscription des naissances dans la commune (trois chiffres)

Une clé de contrôle à deux chiffres complète le numéro INSEE. On calcule la clé avec la méthode suivante : on calcule le reste r de la division du nombre à 13 chiffre de la carte par 97 et la clé est alors égale à $97 - r$.

1. Déterminer la clé de contrôle correspondant au numéro INSEE suivant : 254025002500522.
2. On suppose que lors d'une saisie d'un code INSEE, une erreur est commise.
   (a) Montrer que si un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée par la clé.
   (b) Montrer que si l'on intervertit les deux premiers chiffres, l'erreur est détectée par la clé.

Exercice 32 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Chercher, Communiquer]

Faire une recherche sur le système EAN-13 utile pour les codes barres et montrer que le système permet de détecter certaines erreurs.