Nombres complexes – Propriétés géométriques – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆					1, 2, 3	
Exercices ⋆⋆	12		15	8	4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15	
Exercices ⋆⋆⋆	14, 17		13, 14, 16, 17, 18	18	13, 14, 16, 17, 18	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = 2\pi i$
3. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$
4. $z = -5 - 5i$
5. $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z = 2 + 2i$
2. $z = -3i$
3. $z = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{3}i$
5. $z = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique de :

$$(-1 + i)^{13}.$$

Exercice 4 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme exponentielle de :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos^3(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 8 ⋆⋆ [Raisonner]

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $z' \in \mathbb{U}$ tel que $zz' = 1$.

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- $z^4 = -1$
- $z^3 = i$

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

Soit $n \geqslant 2$. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$z^n = \bar{z}$$

Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

Soit $n \geqslant 2$. Calculer le produit des racines n^{e} de l'unité.

Exercice 12 ⋆⋆ [Calculer, Chercher]

Déterminer tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 13 ⋆⋆⋆ [Chercher, Représenter]

Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des points du plan. Peut-on trouver n points $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ tels que $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ soient les milieux respectifs des segments $[\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2]$, $[\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3]$, …, $[\mathrm{B}_n\mathrm{B}_1]$?

Exercice 14 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer, Chercher]

Si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont n points du plan complexe d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$, on dit qu'un point M d'affixe z appartient à l'enveloppe convexe des $(\mathrm{A}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0\,;1]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et tels que :

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k.$$

On considère $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ses racines et, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, A_i désigne le point d'affixe a_i. Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2i \text{ et } Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Construire à la règle (non graduée) et au compas les points A, B et C.
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2022}.

Exercice 16 ⋆ ⋆ ⋆ [Calculer, Représenter]

1. Déterminer l'expression de $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$, de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
3. En déduire une construction à la règle (non graduée) et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 17 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer, Chercher]

Dans un repère orthonormé, peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

Exercice 18 ⋆ ⋆ ⋆ **[Représenter, Raisonner, Calculer]**

Soient A, B et C trois points non alignés d'affixe a, b et c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si,

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

2. On ne suppose pas nécessairement que ABC est équilatéral. On construit à partir de ABC les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC] construits à l'extérieur de ABC. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forme un triangle équilatéral.